

有限元集中质量法在非饱和 土壤水流中的应用*

谢正辉 曾庆存 戴永久 王 斌

(中国科学院大气物理研究所大气科学和地球流体力学数值模拟国家重点实验室, 北京 100080)

摘 要 利用 Galerkin 有限元集中质量法, 讨论了非饱和土壤水流动的数值计算模型, 用以模拟均质土壤, 地下水埋藏很深且在不同的初始和边界条件下的水分运动。通过将第一类边界条件齐次化, 而对于第二类非线性边界条件采用变分的办法将其直接转化为已知边界通量的计算, 从而容易且较好地处理了带通量约束边界条件。对于入渗或蒸发问题, 用通常的离散方法容易产生振荡非物理解。我们采用有限元集中质量法, 将质量矩阵的非对角元集中到主对角元, 避免了这种非物理解的产生。利用该方案统一地模拟如下情况: 稳定入渗和蒸发、蒸发一段时间后达到风干率, 以及波动入渗蒸发时土壤水势的变化状况。模拟表明, 在已知有关土壤参数的情况下, 该模型能较好地模拟非饱和流水势及含水量分布。

关键词 非饱和土壤水流 有限元集中质量法 数值模拟

1 引言

非饱和土壤水的流动是土壤水未完全充满孔隙时的流动, 是多孔介质流体运动的一种重要形式。非饱和流动的预报在大气科学、土壤学、农业工程、环境工程和地下水动力学等方面具有重要意义。作为一个重要的气候因子土壤含水量, 其季节变动对中高纬地区的天气与气候具有重要的影响。对土壤含水量的进行重点描述的陆面参数化研究, 已是大气科学的热门课题^[1,2]。地表和地下的水文过程, 如大气降水、蒸发和植物的蒸腾, 地面水的渗漏和深层水的上吸, 根系的吸收和地下水流等, 都可归结为非饱和流动^[3~7]。由于方程是非线性的, 除了一些很特殊的情况外, 不能得到解析解。因此, 典型的作法是用数值逼近求解非饱和流方程。用于空间区域的标准逼近是有限元和有限差分法。对于入渗或蒸发问题, 用有限差分法进行离散时, 对边界条件以及土壤参数极为敏感, 我们利用变分的办法将其转化为已知通量的计算, 从而较好地处理了这类边界条件。传统的办法极有可能产生振荡非物理解。采用有限元集中质量法, 避免了振荡非物理解的产生, 用以模拟均质土壤, 地下水埋藏很深且在不同的初始和边界条件下的水分运动, 可以用来统一计算剖面入渗、蒸发、蒸腾和再分配以及当这些现象交替出现时的水分运动过程。这些过程的交替出现的时间判据是根据水头值在入渗边界达到最大或最小值的起始时刻确定。利用该模型^[8,9]对土壤入渗实验进行了数值模拟, 同时模拟了稳定入渗和蒸发、蒸发一段时间后达到风干率, 以及波动入渗蒸发时土壤水势的变化。模

1997-10-22 收到

* 本文得到国家“九五”攀登预选项目“气候动力学和气候预测理论的研究”, 博士后科学基金项目及国家自然科学基金项目(项目批准号 49794030)的资助

拟表明该方案具有很好的质量守恒性质及预估校正迭代的计算稳定性和收敛性,并在已知有关土壤参数的情况下能很好地模拟非饱和土壤水势及含水量分布。

2 一维非饱和土壤水流动问题及其数值计算方案

2.1 垂直入渗和蒸发问题

基于大气环流模式的水平分辨率(1~5个经纬度),土壤水分在水平方向上的流动可以忽略。我们忽略垂直入渗和蒸发问题在水平方向上的流动,考虑一维非饱和流问题。水头值有不同的时空分布。设 z 轴垂直向下,坐标原点取为地面, $h(z, t)$ 为在 t 时刻离地面距离为 z 的下地面的水头值。假设地面有随时间变化的人渗或蒸发率,入渗为正,蒸发为负。假设地下水埋藏很深而在 $\Omega = (0, L)$ 内没有到达潜水面。在底部,水头值或含水率有随时间而变化的分布。根据 Darcy 定律及连续性原理,可得非饱和流 Richard 方程

$$C(h) \frac{\partial h}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial z} \left(K(h) \frac{\partial h}{\partial z} \right) + \frac{\partial K(h)}{\partial z} = S_r, \quad (1)$$

这里, $C(h) = \partial \theta / \partial h [1/L]$ 是比容系数, $\theta [L^3/L^3]$ 是含水率, $h [L]$ 是负压水头, $K(h) [L T^{-1}]$ 是有效水力传导系数, $S_r [L^3 T^{-1} L^{-3}]$ 是根系吸水率, 见文献[3~9]。其定解条件如下:

(1) 初始条件: $h(z, 0) = h_0(z)$, 当剖面水头及含水率均匀时, $h(z, 0) = C_1$ 为一常数。

(2) 下边界条件: $h(L, t) = \beta(t)$, 当地下水位埋藏很深, 土壤深处水头均匀分布时, $z \geq L$ 时, $h(z, t)$ 为一常数。

(3) 上边界可以有列情况:

(a) 当入渗时地表通量已知, 即认为表面供水强度(降雨或喷灌)已知, 但未超过土壤入渗强度, 不形成积水或表面径流, 此时相当于第二类边界条件

$$K(h) - K(h) \frac{\partial h}{\partial z} = q(t), \quad \text{当 } z = 0 \text{ 时.}$$

雨量不大的降水入渗就是这种情况, 此时决定入渗的不是土的入渗能力而是供水强度 q ; 当土壤以某一蒸发率 $q(t)$ 蒸发时, 也是这类边界条件, 此时的 $q(t)$ 应为负, 以下类同; 当 $q(t) = 0$ 时即为再分配(或内排水)过程。

(b) 当入渗时地表通量已知, 但经历一定时间后超过入渗能力, 此时假定形成径流泄走, 不形成缺水, 这种情况可近似为

$$\begin{cases} K(h) - K(h) \frac{\partial h}{\partial z} = q(t), & \text{当 } z = 0, t_a > t > 0 \text{ 时} \\ h(0, t) = 0, & \text{当 } t \geq t_a \text{ 时} \end{cases}$$

t_a 为供水强度超过入渗能力的起始时间。设 $h \leq 0$, t_a 为当 $h(0, t) = 0$ 的起始时刻, 当土壤以某一蒸发率 $q(t)$ 蒸发时, 经时间 t_a 后, 地表达达到风干含水率, $h = h_d$, 此时上式中第 2 行为 $h(0, t) = h_d$, 当 $t > t_a$ 时, 这里 t_a 为地表达达到风干率时的起始时间。

(c) 当入渗时地表保持湿润或极薄水层, 这是近似地面灌溉中的畦灌, 相当于第一类边界条件 $h(0, t) = 0$; 当供水强度 q 相当大时, 所供的水不能全部渗入地下, 多余的水在地表形成积水或产生地表径流, 下暴雨或进行灌溉时常为此情况, 此时入渗率由土壤的入渗性能决定, 但地表的表土在入渗过程中总是饱和的, 这时即为有压入渗过程; 当外界蒸发力很大时, 在很短时间内地表被干燥为接近于风干率 θ_d , 此时 $h = h_d$, 即相当于第一类边界条件 $h(0, t) = h_d$ 。

根据以上定解条件求解基本方程, 便可得出垂直入渗、蒸发、蒸腾及再分配条件下土壤水势的变化过程, 再由 h 和 θ 的构造关系就可以求出土壤含水量的分布和变化。

下面根据方程 (1) 以及本节所述初始条件、下边界条件及入渗和蒸发上边界条件的定解问题, 说明本模型的数值模拟过程。

设 $H_E^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega), v(L) = 0\}$, 这里 $H^1(\Omega)$ 为在区域 Ω 内直到一阶导数平方可积的 Sobolev 空间^[10]。令 $h(z, t) = \bar{h}(z, t) + \beta(t)$, 将第一类边界条件齐次化, 则有

$$\begin{cases} C(h) \frac{\partial \bar{h}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left(K(h) \frac{\partial \bar{h}}{\partial z} - K(h) \right) - C(h) \frac{\partial \beta}{\partial t} + S_r, & (z, t) \in \Omega \times (0, T) \\ \bar{h}(z, 0) = h_0(z) - \beta(0), & z \in \Omega \\ K(h) - K(h) \frac{\partial \bar{h}}{\partial z} \Big|_{z=0} = q(t), & t \in (0, T) \\ \bar{h}(L, t) = 0, \\ h(z, t) = \bar{h}(z, t) + \beta(t). \end{cases}$$

它的等价变分形式为

$$\begin{cases} \text{求 } h(z, t) \in H_E^1(\Omega), \quad \forall t \in (0, T), \text{ 使得 } \forall \varphi \in H_E^1(\Omega), \\ \left(C(h) \frac{\partial \bar{h}}{\partial t}, \varphi \right) + \left(K(h) \frac{\partial \bar{h}}{\partial z}, \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) = q\varphi|_0^L + \int_0^L K(h) \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz + (S_r, \varphi) - \left(C(h) \frac{\partial \beta}{\partial t}, \varphi \right). \end{cases} \quad (2)$$

这里的 $(\cdot, \cdot)$ 表示区域 Ω 上的 L^2 内积^[10], 以下类同。

对于边界条件均为第一类边界条件的初边值问题, $h(0, t) = \alpha(t)$, $h(L, t) = \beta(t)$, 则可令

$$h(z, t) = \bar{h}(z, t) + \left(\alpha(t) + \frac{\beta(t) - \alpha(t)}{L} z \right).$$

那么 $\bar{h}(0, t) = \bar{h}(L, t) = 0$, 从而将第一类边界条件进行了齐次化。在讨论对应问题的变分形式时, 只须将 $H_E^1(\Omega)$ 换为 $H_0^1(\Omega)$ 即可。这里,

$$H_0^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega); v|_{\partial\Omega} = 0\}.$$

2.2 有限元-有限差分全离散格式

我们在空间方向用有限元逼近。对 $\Omega = (0, L)$ 作有限元剖分: $0 = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n+1} = L$, x_0 和 x_{n+1} 为边界点。令 $e_i = (x_i, x_{i+1})$ ($i = 0, \dots, n$) 为 $n+1$ 个单元。定义有限元空间 $V_h \subset H_E^1(\Omega)$: $V_h = \{v_h \text{ 在 } [0, 1] \text{ 上是连续函数, } v_h|_{e_i} \text{ 是线性的, } 0 \leq i \leq n, \text{ 且 } v_h(L) = 0\}$ 。令 $\{\varphi_i\} \subset V_h$ 为有限元基函数^[11], $\varphi_i(x_j) = \delta_{ij}$ ($i, j = 0, \dots, n+1$)。因 $\bar{h} \in V_h$, 故 $h(z, t) = \sum_{i=1}^n X_i(t) \varphi_i(x) + \beta(t)$ 。从而所考虑定解问题 (2) 的半离散

有限元逼近问题的矩阵形式为

$$\begin{cases} [A]\{X\} + [B]\left\{\frac{dX}{dt}\right\} = \{F\}, \\ \{X(0)\} = (h_0(x_0) - \beta(0), \dots, h_0(x_n) - \beta(0))^T, \end{cases} \quad (3)$$

其中

$$\begin{cases} [A] = [A_{ij}], \quad A_{ij} = \int_0^L K(h) \frac{d\varphi_i}{dz} \frac{d\varphi_j}{dz} dz, \\ [B] = [B_{ij}], \quad B_{ij} = \int_0^L C(h) \varphi_i \varphi_j dz, \\ \{F\} = [F_i], \quad F_i = q(h) \varphi_i|_0^L + (S_r, \varphi_i) - \int_0^L K(h) \frac{d\varphi_i}{dz} dz, \\ \{X\} = (X_0(t), \dots, X_n(t))^T, \\ \left\{\frac{dX}{dt}\right\} = \left(\frac{dX_0}{dt}, \dots, \frac{dX_n}{dt}\right)^T, \quad i, j = 0, \dots, n. \end{cases} \quad (4)$$

方程 (3) 定义了一类非线性常微分方程组。要数值求解，仍须对时间变量离散化。

在时间方向上引入有限差分格式逼近矩阵方程的时间导数，从而得到了问题 (2) 的 Galerkin 有限元-有限差分全离散格式。为此定义下面的逼近：

$$\begin{cases} \left\{\frac{dX}{dt}\right\} \approx \frac{\{X\}_{t+\Delta t} - \{X\}_t}{\Delta t}, \\ \{X\}_{t+\Delta t/2} \approx \omega \{X\}_{t+\Delta t} + (1-\omega) \{X\}_t, \end{cases} \quad (5)$$

这里， Δt 是时间步长，而 ω 是一个时间方向的带权系数。利用 (5) 所引入的逼近代入在半时间层 ($t + \Delta t/2$) 处定义的矩阵方程 (3)，可得如下的方程：

$$[P]_{t+\Delta t/2} \{X\}_{t+\Delta t} = [Q]_{t+\Delta t/2} \{X\}_t + \{F\}_{t+\Delta t/2}, \quad (6)$$

这里，

$$\begin{cases} [P] = \omega[A] + \frac{1}{\Delta t}[B], \\ [Q] = (\omega - 1)[A] + \frac{1}{\Delta t}[B]. \end{cases} \quad (7)$$

当 $\omega = 1$ 时，对应于时间方向为隐式差分格式，即使其系数在半时间层求得，仍然得到隐式差分。当 $\omega = 1/2$ 时，得到了 Crank-Nicolson 型算法。为了能求解方程 (6)，需要在半时间层求系数 K 和 C 的分布，以计算出 (4) 中的系数矩阵 $[A]$ 、 $[B]$ 、 $[F]$ 以及 (6) 中的系数矩阵 $[P]$ 、 $[Q]$ 。由于我们在实际计算中采用集中质量法，将质量矩阵 $[B]$ 每行的非对角元全部放到主对角线上做代数和，避免振荡非物理解的产生。这些矩阵的元素依赖于负压水头，因而必须估计在半时间层上的水头分布。对于每一时间步，这种分布是通过原来分布的线性外推而获得：

$$h_{t+\Delta t/2} = h_t + \frac{\Delta t_n}{2\Delta t_0} (h_t - h_{t-\Delta t}), \quad (8)$$

这里的 Δt_n 和 Δt_0 分别是新旧时间增量。(5) 中的表达式是一种近似，可通过预估校正

法结合一个迭代过程加以改进。在每一迭代中, 通过解方程 (6) 而得到的水头分布 $h_{o,(t+\Delta t)}$ 用于得到一个新的半时间层的估计 $h_{t+\Delta t/2} = (h_{o,(t+\Delta t)} + h_t) / 2$ 。利用 $h_{t+\Delta t/2}$ 的分布计算矩阵 P 、 Q 、 F 并求解方程 (6) 得到一个新的水头值 $h_{n,(t+\Delta t)}$, 即校正水头分布。如果 $|h_{n,(t+\Delta t)} - h_{o,(t+\Delta t)}| \leq \mu_1 + \mu_2 |h_{n,(t+\Delta t)}|$, 则停机, 否则继续进行上述迭代。这里的 μ_1 , μ_2 分别为给定的绝对和相对误差, 是预估校正迭代收敛判据。这样能大大改进预估校正的结果。

计算一个新的时间层的水头分布, 首先要计算这一时间步中间的水头分布 $h_{t+\Delta t/2}$ 。当这一层不是第一时间层时, 可按 (8) 通过原来时间层分布作线性外推而作预估。但当时间层还在第 1 层时, 即已知初始水头值, 求第 2 层的水头分布时, 不能作这样的外推。此时可以采用以下办法, 即把初始步值作为中间时间层的水头值, 来预估中间水头值, 再进行计算。

对于边界条件全是第一类的, 则先按上小节中的讨论齐次化边界条件, 然后可类似于上面的讨论定义有限元逼近, 其有限元空间可类似定义为 $V_h \subset H_0^1(\Omega)$, $v_h \in V_h$ 在 0, L 为零。其余可类似讨论。

3 数值模拟

3.1 稳定入渗与蒸发

文献[7]在实验室里利用长 93.5 cm, 内部直径 6 cm 的玻璃柱管, 里面充满砂壤土, 密度为 1.66 g/cm^3 , 在柱管土壤表面下面 7、22、37、52、67、82 cm 处的深处装有湿度计, 每一个湿度计有压力传感器, 在不同深度土壤含水量的变化可通过 γ -射线的衰减而测得含水率。在柱管下端保持定常的水压, 而在土壤表面 ($z=0$) 保持一段时间定常的人渗通量 (13.69 cm/h)。我们假设过了 0.7 h 以后, 表土以 4 mm/h 的强度蒸发, 当表土达到风干率时, $h(0, t) = -61.5 \text{ cm}$, 表土水头维持不变。土壤的水传导率与含水量的关系通过分析不稳定流动中土壤含水量及水头分布而得到^[8,9]。土壤水头与含水量的关系可以通过湿度计所测数据确定水头和水分含量分布^[7]。下面的解析表达式是通过适合刻划这种土壤的所有数据点利用最小二乘法而求得 (参见图 1 和图 2):

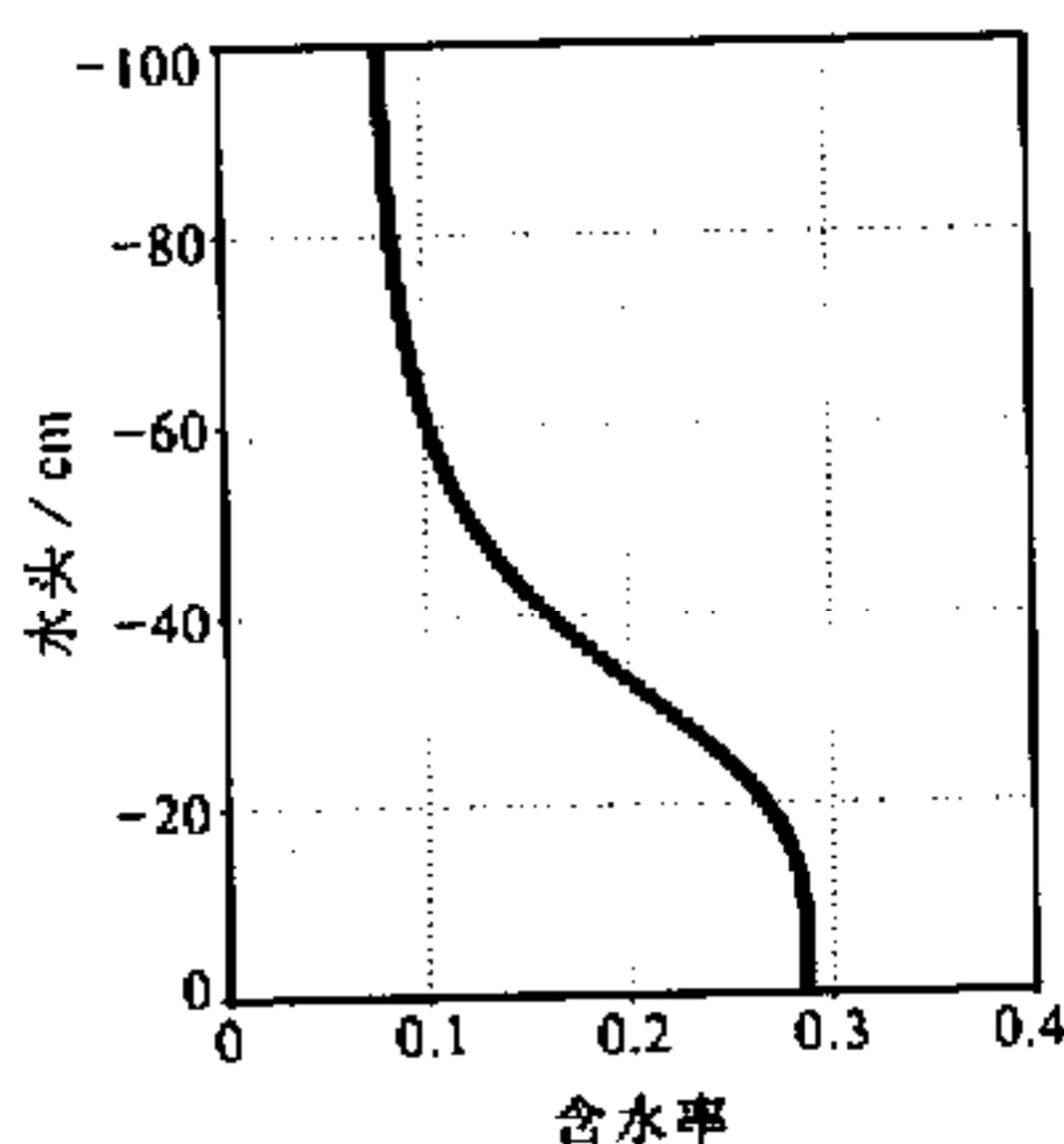


图 1 负压水头 h 与含水率 θ 的关系

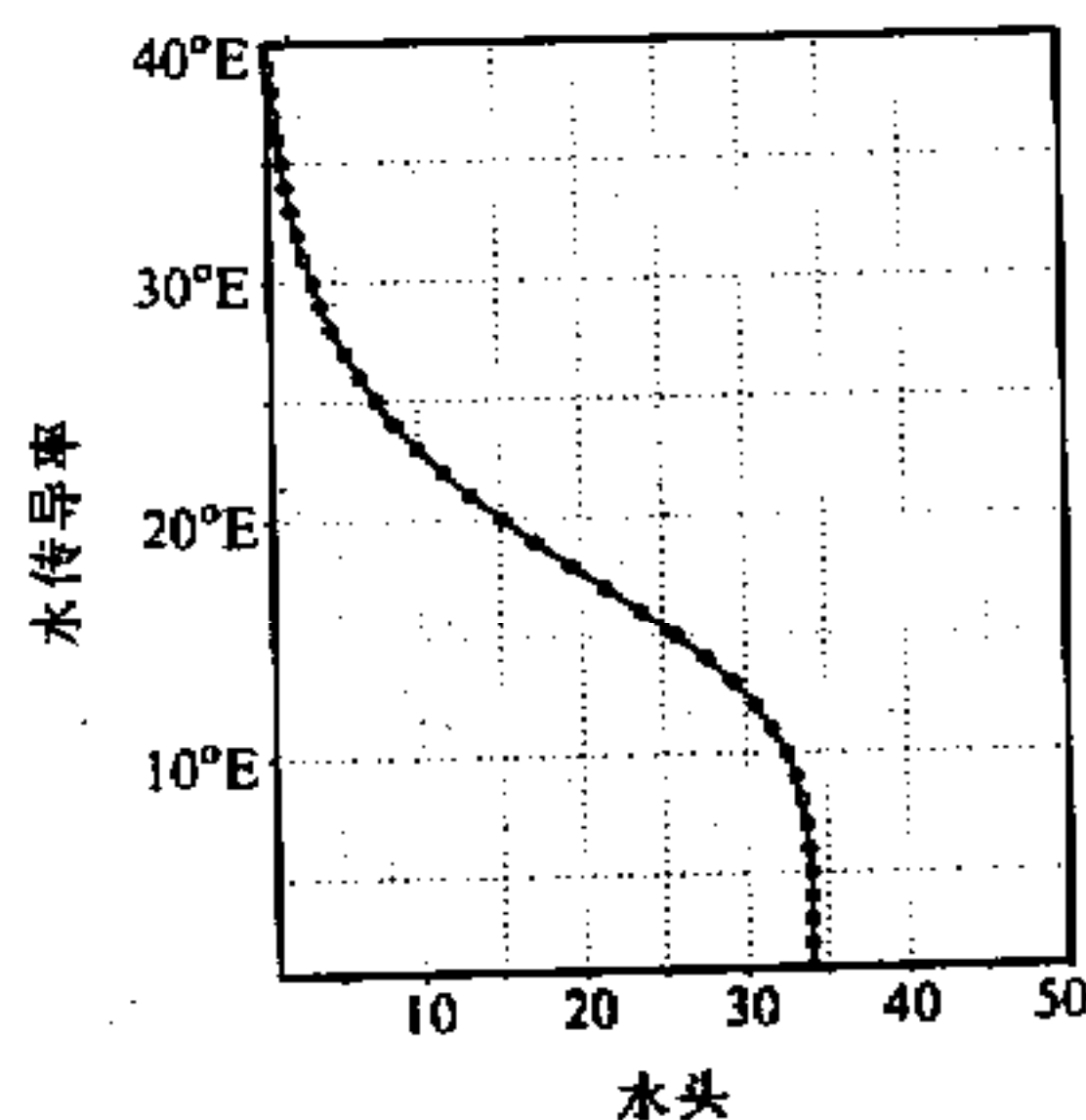


图 2 水传导率 $K(h)$ 与负压水头 h 的关系

$$\begin{cases} K(h) = K_s \frac{A}{A + |h|^\gamma}, & K_s = 34 \text{ cm/h}, A = 1.175 \times 10^6, \gamma = 4.74, \\ \theta(h) = \frac{\alpha(\theta_s - \theta_r)}{\alpha + |h|^\beta} + \theta_r, & \theta_s = 0.287, \theta_r = 0.075, \alpha = 1.611 \times 10^6, \beta = 3.96, \end{cases} \quad (9)$$

这里, h 的单位是 cm; 下标 s 指饱和的意思, 即对于 $h=0$ 时的 θ 的值; 下标 r 指的是残余含水率, 见文献[7~9]。入渗到该土壤下的初始和边界条件为

$$\begin{cases} h(0, z) = -61.5 \text{ cm 或 } \theta_n = 0.10 \text{ cm}^3/\text{cm}^3, & z \in [0, 70], \\ q(t, 0) = \begin{cases} 13.69 \text{ cm/h}, & \text{当 } 0 < t < 0.7 \text{ h 时}, \\ q = -0.4 \text{ cm/h}, & \text{当 } t > 0.7 \text{ h 时}, \end{cases} \\ h(70, t) = -61.5 \text{ cm}. \end{cases} \quad (10)$$

将区域 $\Omega = (0, 70)$ 分为 70 个单元, 每一单元的长度为 1 cm, 时间步长 $\Delta t = 5 \text{ s}$, 模拟 0.7 h, 利用这些数据输入该程序, 所得的水头与含水率分布如图 3、4 所示。这里的横坐标表示某一时刻的水头或含水率, 每条曲线代表某一时刻的水头或含水率分布, 纵坐标表示柱管内土壤深度。把图 3、4 与文献[7]中提到的试验及模拟相比较, 结果是相吻合的。对于单调入渗问题随时间变化, 没有产生振荡的非物理解。

图 4 是初始入渗时以及从 0.1 h 开始每隔 0.1 h 的含水率分布曲线。由图 4 可以看出, 入渗开始到 0.1 h 这一段时间, 地表面层的含水率迅速从 0.1 上升到 0.25 以上。从此时刻以后, 地表面层 $z=0$ 处的含水率变化不大, 然后地表逐步接近饱和含水率。当 $t > 0.7 \text{ h}$ 时, 表土以 4 mm/h 的强度蒸发, 即 $q = -4 \text{ mm/h}$ 。图 5 是在 0.7 h 以后每隔 0.7 h 的含水率分布曲线。由图可以看出, 当开始蒸发时, 表土的含水率降低。由于重力流的作用, 靠近下底边界的含水率峰面继续向下推进。过了 0.1 h 以后, 含水率分布曲线逐渐随时间层而降低。最后到了约 1200 时间层, 即约 1.67 h 以后, 表层达到风干率 0.1, 之后由于重力流的作用, 下边界附近的含水率随时间而变化并逐步接近风干率 0.1。由此可以看出, 该模拟结果较好地模拟了入渗、蒸发以及它们交替出现的情况, 与实际情况是一致的。

以下讨论质量均衡的情况。第 j 时间层的均衡误差定义为 $E(t_j) = |1 - M(t_j)|$,

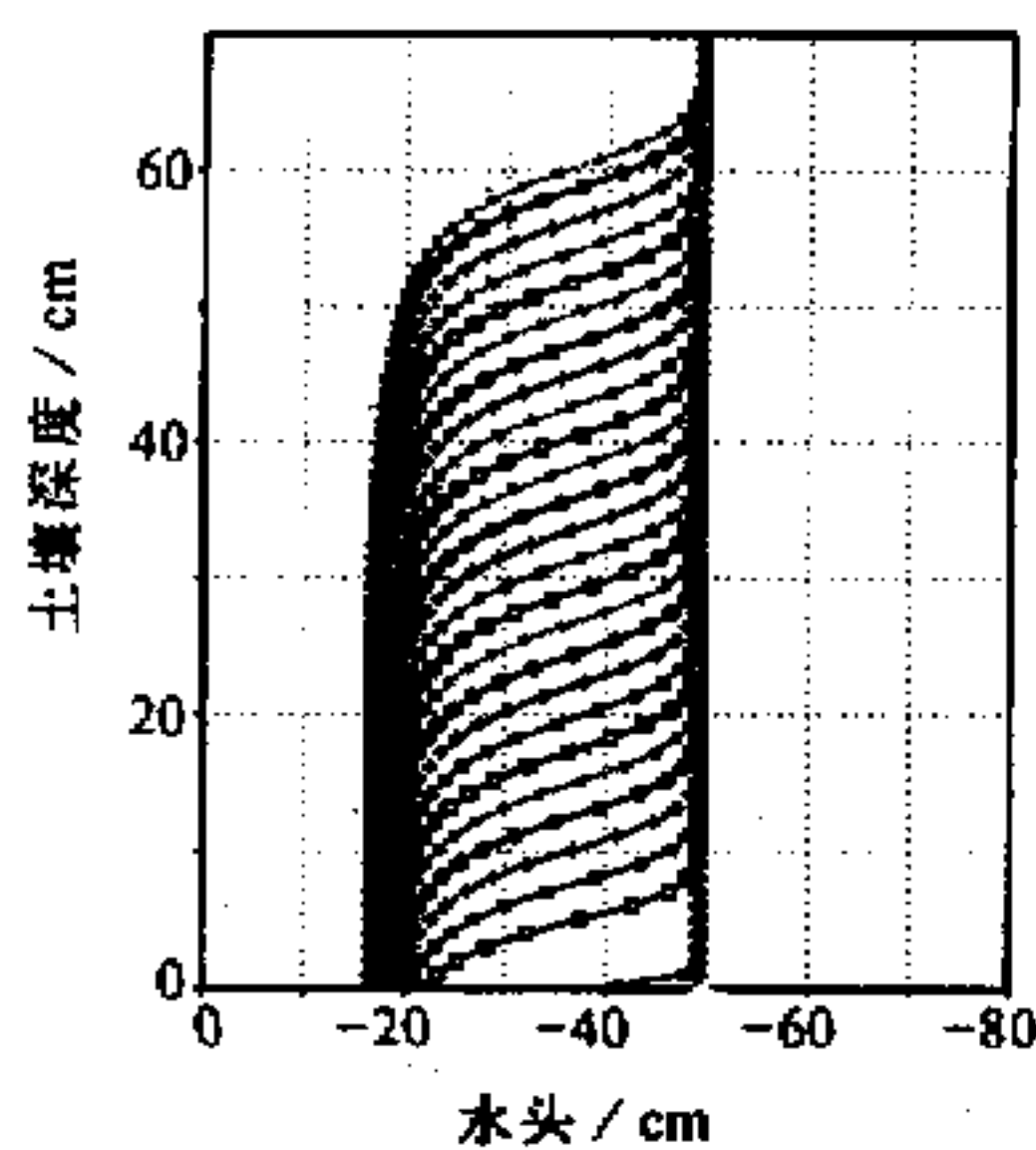


图 3 水头分布

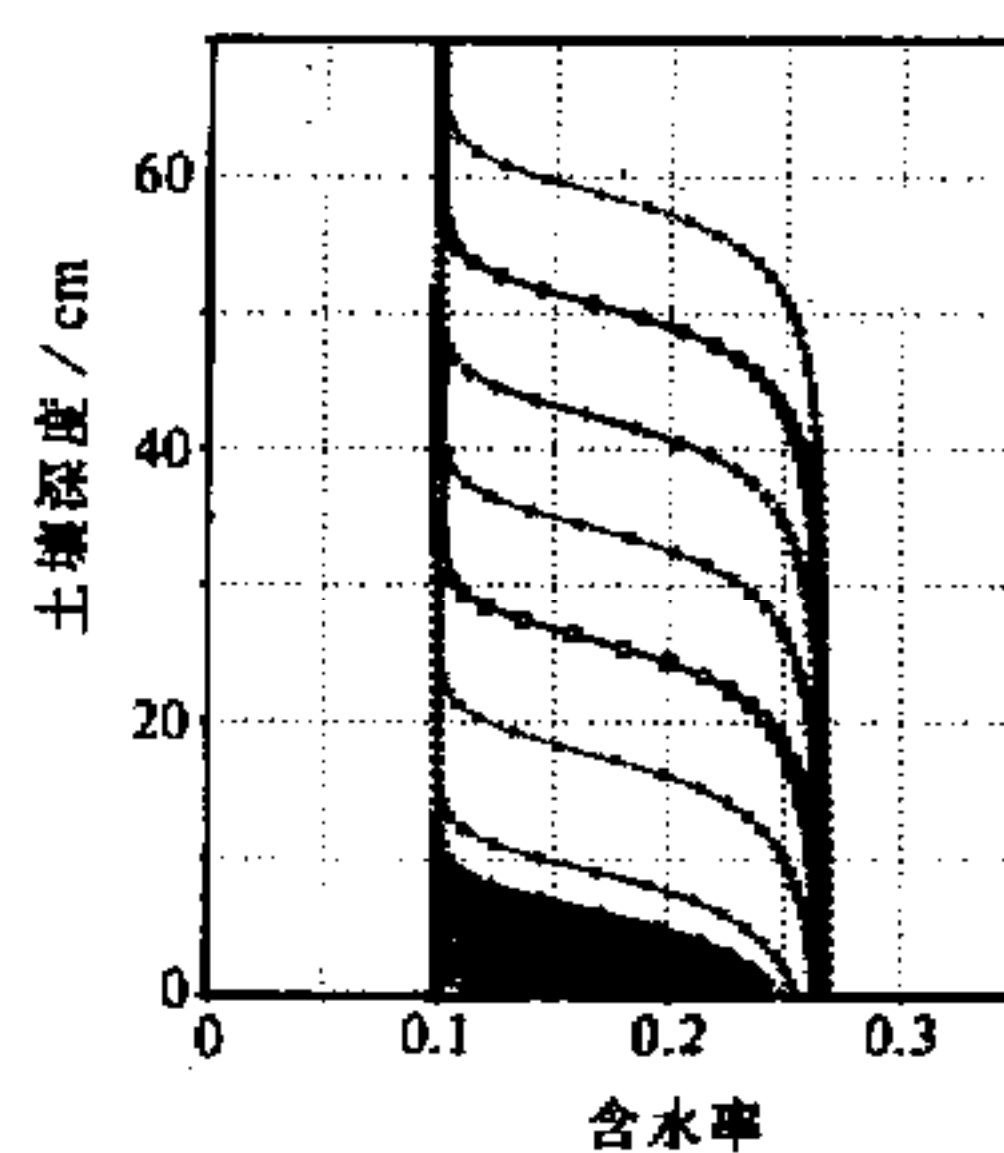


图 4 初始时刻及每隔 0.1 h 的含水率分布

其中,

$$M(t_j) = \frac{\left\{ \sum_{i=1}^{n-1} [(\theta_{i,j} - \theta_{i,0})\Delta z] + (\theta_{0,j} - \theta_{0,0})(\Delta z/2) + (\theta_{n,j} - \theta_{n,0})(\Delta z/2) \right\}}{\left\{ \sum_{i=1}^{n-1} (q_{0,i} - q_{N,i})\Delta t \right\}}$$

它随时间层次变化的曲线如图 6 所示。由图 6 可以看出, 在入渗开始时刻, 均衡误差超过 9%, 以后迅速降低。当计算到 160 时间层即 800 s 时, 降到 3% 以下, 到 260 层后小于 2%, 以后保持在 1.5% 以内。从而具有较好的质量守恒性质。

预估校正迭代次数随时间变化的曲线如图 7 所示。由图 7 可以看出, 随时间层次的增长, 其用于预估校正迭代的次数并没有增加。开始时刻的迭代次数依次从 8 次、5 次减到 4 次, 计算到 80 层即 400 s 后一直保持 3 次迭代收敛。说明计算迭代收敛快而且稳定, 但初始时刻迭代的次数要多一些。这种情况与我们的计算方案是吻合的, 可以从下面的分析中得到解释。在计算过程中, 采用预估线性外推方法, 利用前两个时间层的水头分布预估下层水头, 再用校正迭代求解。在这种情况下, 其系数预估时随时间的变

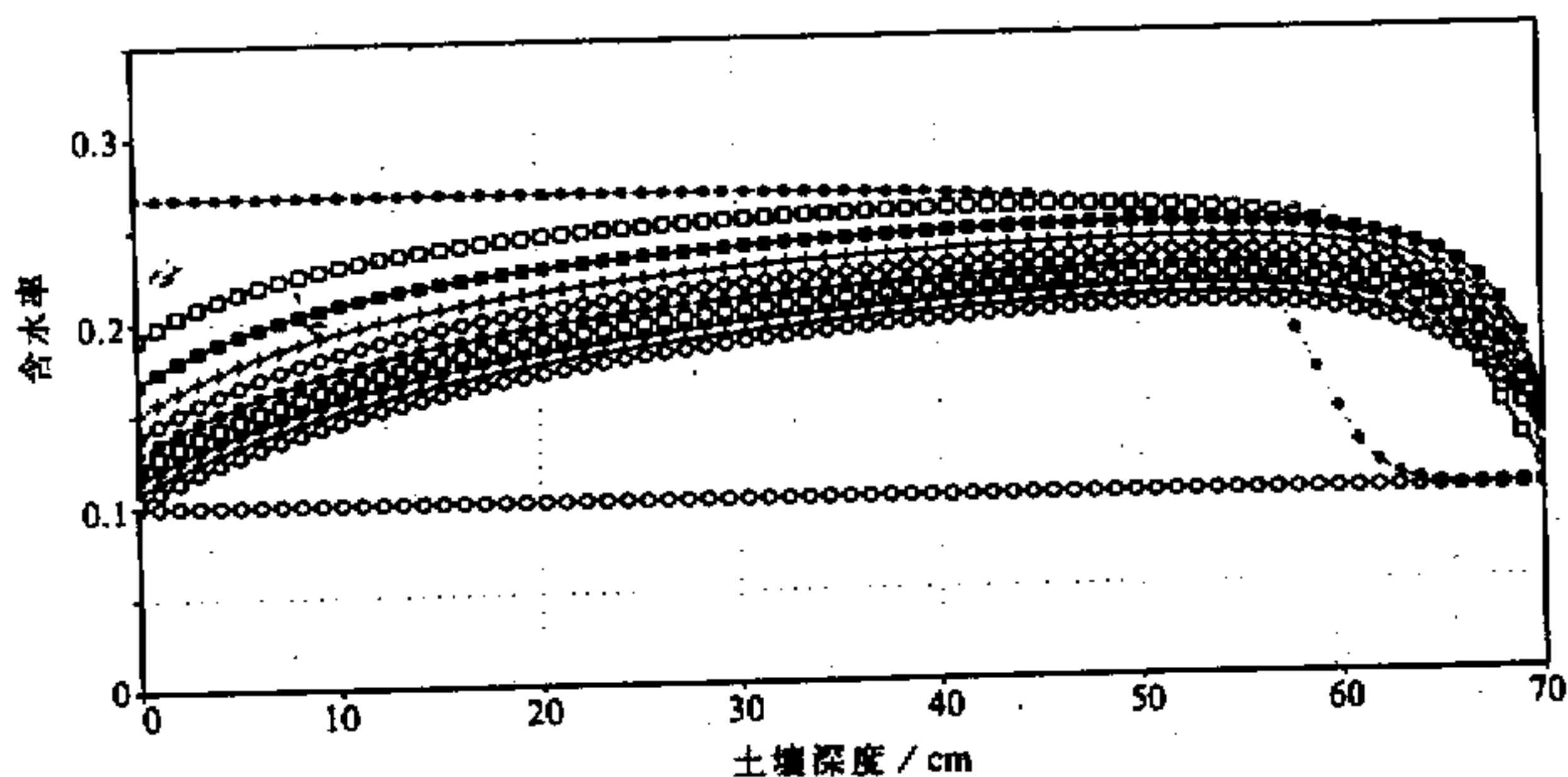


图 5 入渗、蒸发、表土达到风干率过程的含水率分布

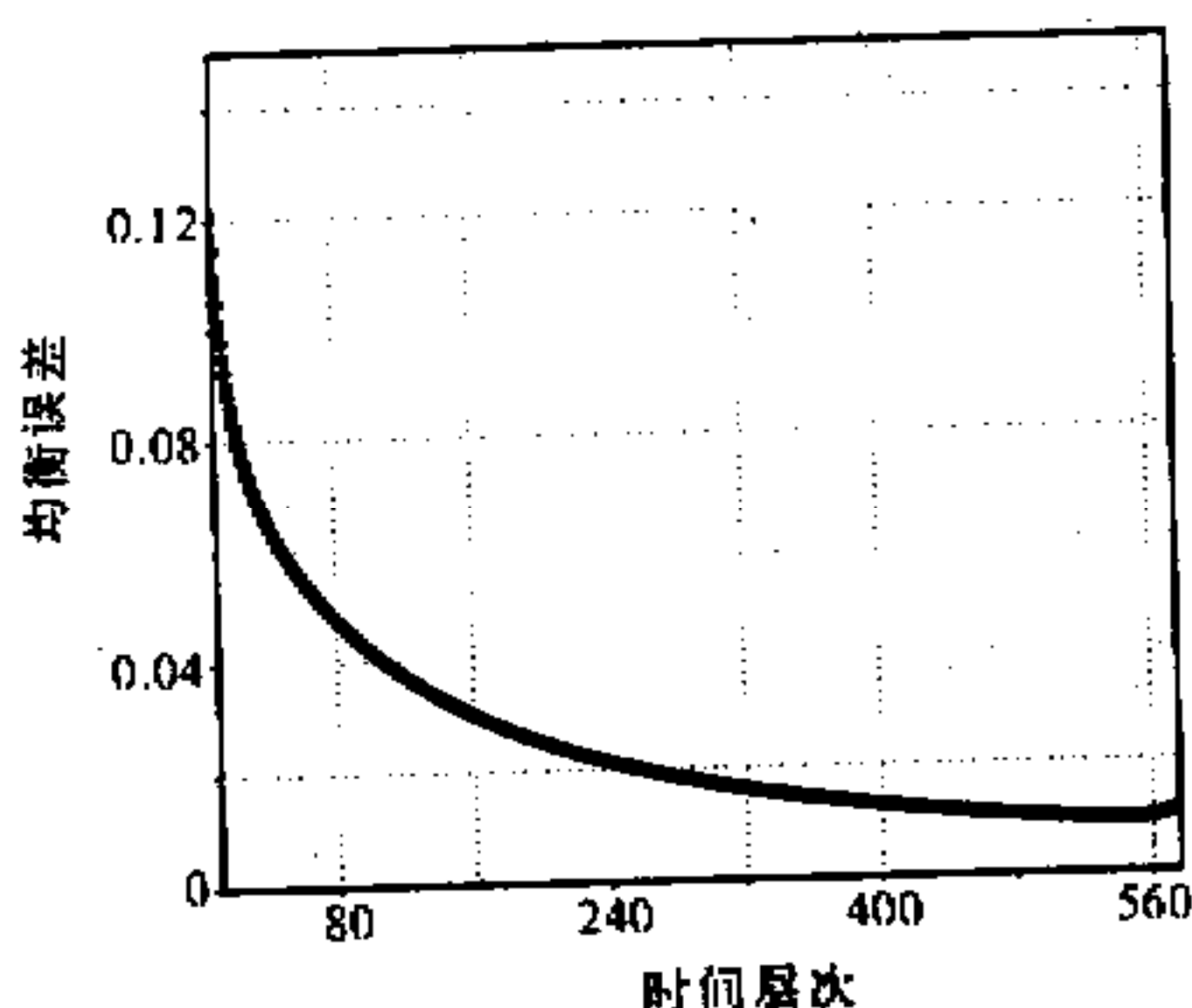


图 6 均衡误差随时间层次的变化

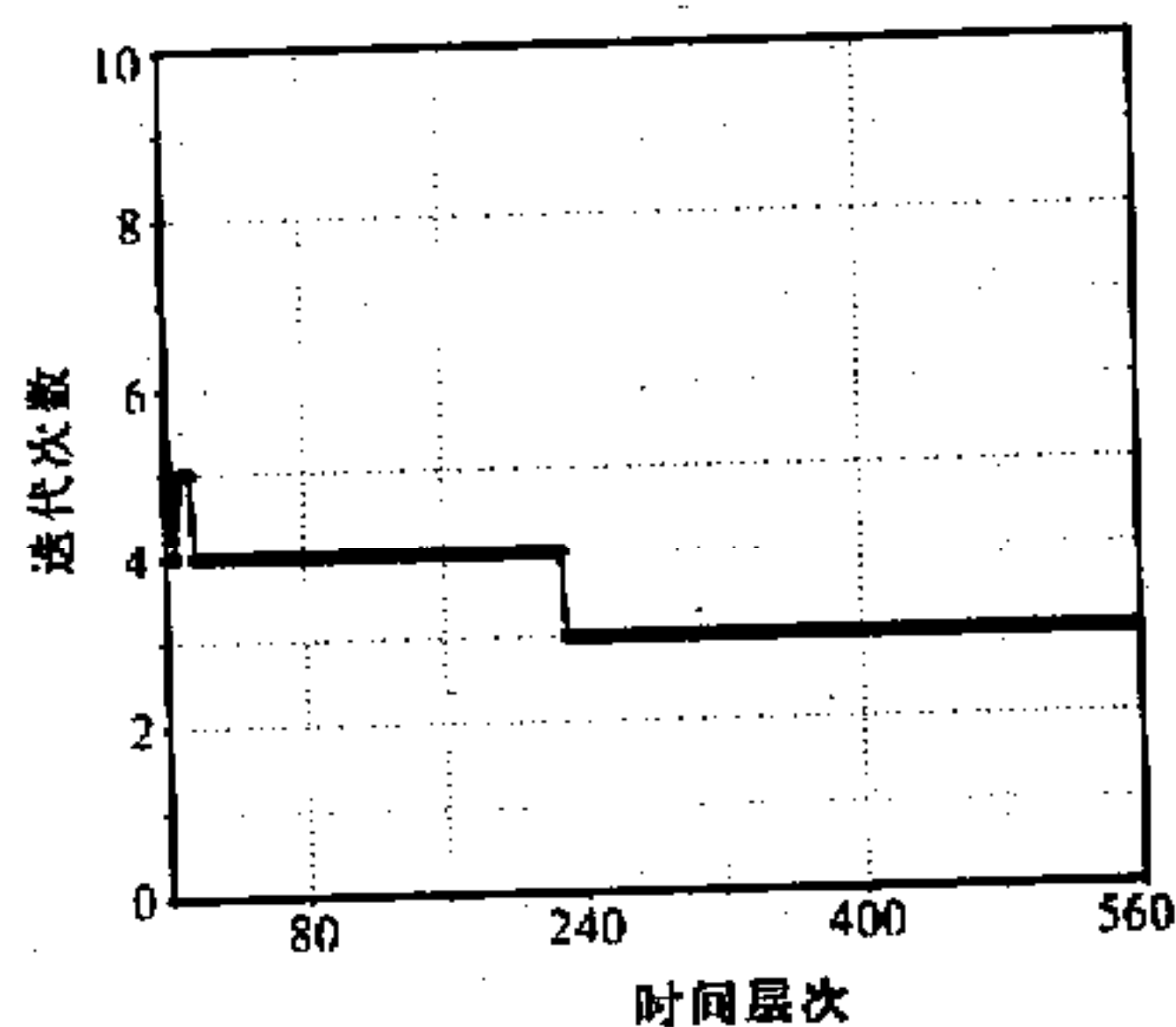


图 7 迭代次数随时间层次的变化

化是二阶精度。而在初始时刻,不能作这样的外推,我们采用的是显式外推方法,即利用已知的初始水头分布及相应的土壤水分运动参数值预估,然后再进行迭代校正求解,时间步长是一阶精度,从而预估校正迭代的次数自然要多一些。由此可以看出,当时间步长越短,用这种线性外推的办法作预估效果就越好。

3.2 波动入渗与蒸发

现在假设本节开始所述的人渗试验中,表土以 $q(t)=13.69\text{ cm/h}$ 入渗0.26 h以后,以 $q(t)=2\sin 7200\pi t\text{ cm/h}$ 入渗蒸发(当 $q(t)\geq 0$ 时为入渗, $q(t)\leq 0$ 为蒸发),则定解条件为

$$\begin{cases} h(0, z) = -61.5\text{ cm 或 } \theta_n = 0.10\text{ cm}^3/\text{cm}^3, z \in [0, 70], \\ q(t, 0) = \begin{cases} 13.69\text{ cm/h, 当 } 0 < t < 0.27\text{ h时,} \\ q = 2\sin 7200\pi t\text{ cm/h, 当 } t > 0.27\text{ h时,} \end{cases} \\ h(70, t) = -61.5\text{ cm.} \end{cases} \quad (11)$$

图8和图9是初始条件为 $h=-61.5\text{ cm}$ 而以 $q=13.69\text{ cm/h}$ 入渗后,以每小时 $q=2\sin 7200\pi t\text{ cm/h}$ 的强度波动入渗蒸发在不同时刻的土壤水头及含水率分布。由图可以看出,入渗一段时间后,在 $z=0$ 处的含水率和水头开始波动,这与波动入渗蒸发的实际情况是吻合的。

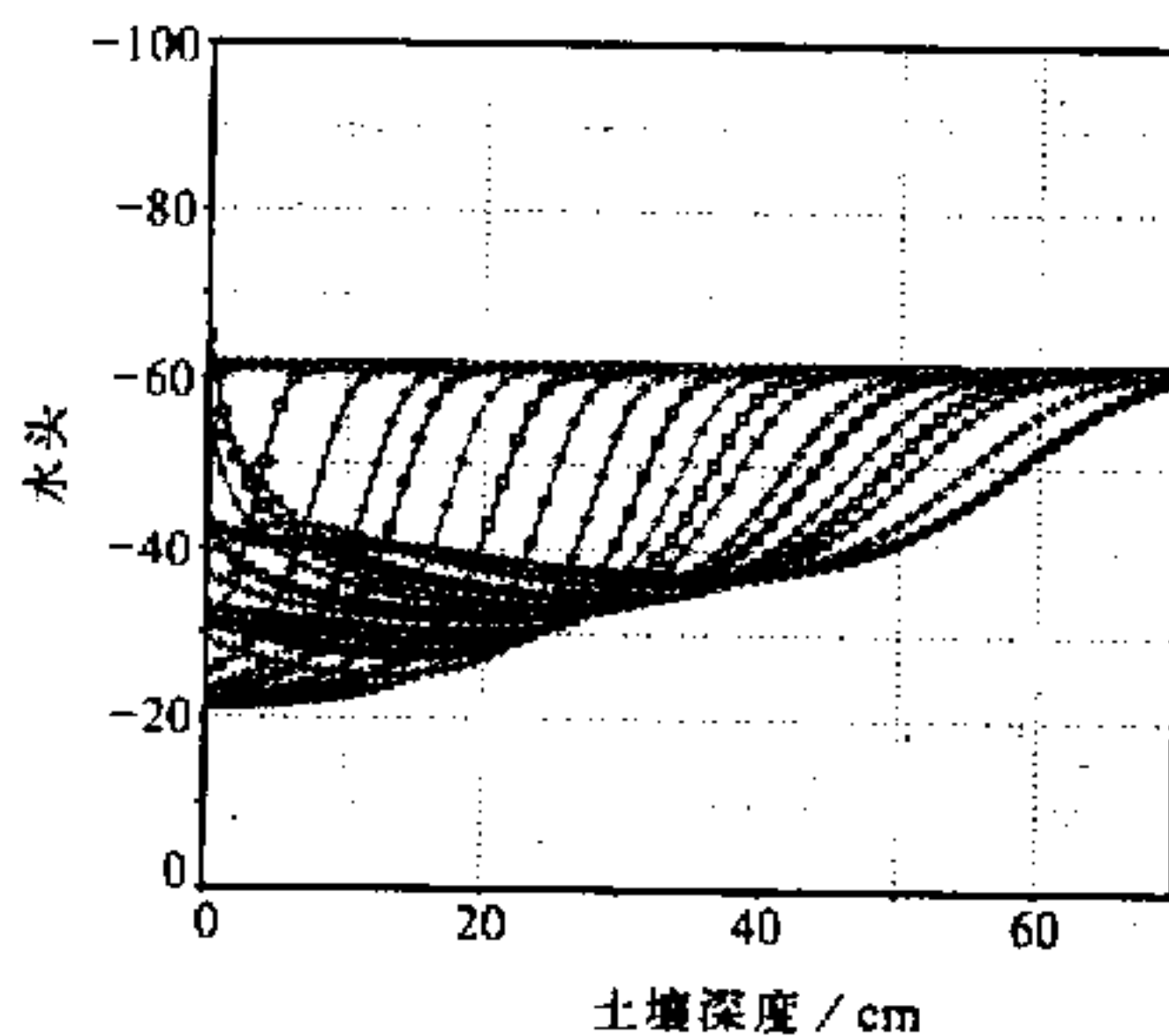


图8 波动入渗蒸发水头分布

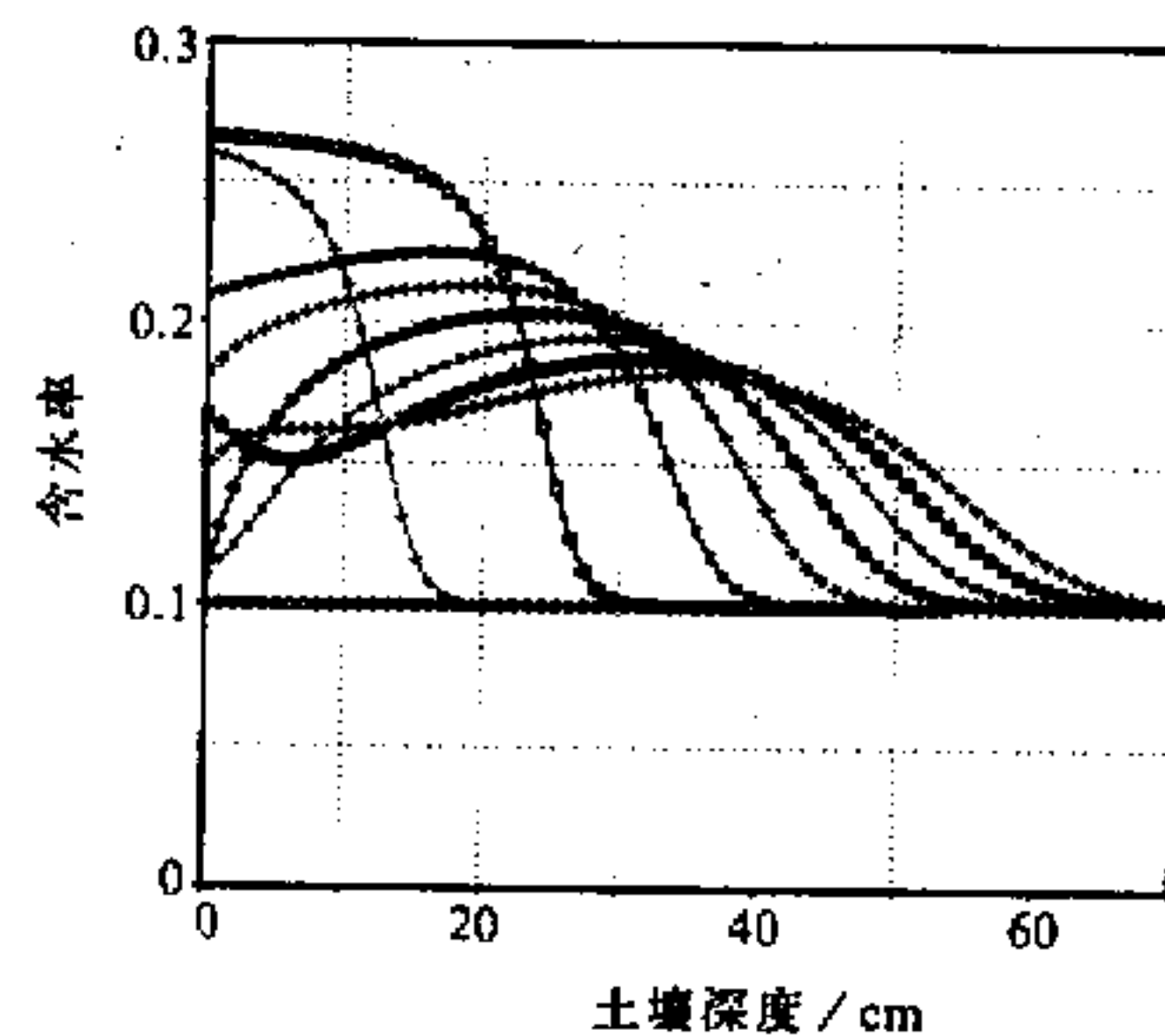


图9 波动入渗蒸发含水率分布

4 结论与讨论

利用 h 型非饱和流方程的有限元集中质量法,建立了数值计算模型,用以模拟均质土壤,地下水位埋藏很深且在不同初始和边界控制条件下的水分运动。对于入渗和蒸发边界条件,通过变分的办法将其直接转化为已知通量的计算,从而得到较好的处理。在每一个新的时间层,先用线性外推的方法进行预估,然后进行迭代校正,这样能减少迭代次数。数值模拟结果表明,采用有限元集中质量法,避免了振荡非物理解的产生,可以用来很好地模拟统一剖面入渗、蒸发和再分配以及这些现象交替出现时的水分运动过程。同时表明该方案具有较好的质量守恒性质以及计算的收敛性和稳定性。非饱和流问

题的数值模拟研究对于改进陆面过程中土壤水流及温度的计算, 以及开展气候对地下水资源影响的研究具有重要的理论和实际意义, 我们将着手进行这方面的工作。关于有限元逼近的收敛性以及利用质量集中法所引起误差的分析将另文讨论。对于地下水位埋藏不深的饱和-非饱和土壤水等地下水流问题, 特别是地下水水位的数值模拟问题, 将作进一步的研究。

参 考 文 献

- 1 叶笃正、曾庆存、郑裕福编, 1991, 当代气候研究, 北京: 气象出版社, 353pp.
- 2 Dai Yongjiu, Zeng Qingcun, 1997, A land surface model (IAP94) for climate studies. Part I: Formulation and validation in off-line experiments, *Advances in Atmospheric Sciences*, 14(4), 443~460.
- 3 雷志栋、杨诗秀、谢森传, 1988, 土壤水动力学, 北京: 清华大学出版社.
- 4 Bear J., 1972, *Dynamics of Fluids in Porous Media*, American Elsevier Publishing Company Inc.
- 5 Celia M. A., Boulouton E. T., Zarba R. L., 1990, A general mass conservation numerical solution for the unsaturated flow equation, *Water Resour. Res.*, 26(7), 1483~1496.
- 6 Klaus Rathfelder, Linda M. Abriola, 1994, Mass conservative numerical solutions of the head-based Richards equation, *Water Resour. Res.*, 30(9), 2579~2586.
- 7 Haverkamp R., Vauclin M., Touma J., et al., 1977, A comparison of numerical simulation models for one-dimensional infiltration, *Soil Sci. Soc. Am. J.*, 41, 285~294.
- 8 Watson K. K., 1968, An instantaneous profile method for determining the hydraulic conductivity of insaturated porous material, *Water Resour. Res.*, 2, 709~715.
- 9 Vachaud G., Thony J. L., 1971, Hyteresis during infiltration and redistribution in a soil column at different initial water contents, *Water Resour. Res.*, 7, 111~127.
- 10 Adams R. A., 1975, *Sobolev Spaces*, New York: Academic Press.
- 11 Ciarlet P. C., 1978, *The Finite Element Methods for Elliptic Problems*, North-Holland.

An Application of the Mass-Lumped Finite Element Method to an Unsaturated Soil Water Flow Problem

Xie Zhenghui, Zeng Qingcun, Dai Yongjiu and Wang Bin

(State Key Laboratory of Numerical Modeling for Atmospheric Sciences and Geophysical Fluid Dynamics,
Institute of Atmospheric Physics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080)

Abstract A numerical model for an unsaturated flow problem by using finite element method is established in order to simulate liquid moisture flow in an unsaturated zone with homogeneous soil and deep subsurface water, and with different initial and boundary conditions. For infiltration or evaporation problems, a traditional method usually yields oscillatory non-physics profiles. However, we obtain nonoscillatory solutions and evade non-physics solutions for these problems by using the mass-lumped finite element method. Moreover, the kind of boundary conditions is handled very well.

Key words unsaturated flow finite element mass lumping numerical simulation