

大气中粘性效应对三维地形波 及其波动阻力的影响*

刘辉志 洪钟祥

(中国科学院大气物理研究所大气边界层物理和大气化学国家重点实验室, 北京 100029)

桑建国

(北京大学地球物理学系, 北京 100871)

摘要 采用两层大气模式, 通过引入瑞利摩擦系数来定性描述大气中粘性机制, 讨论了粘性效应对三维简单地形波及其波动阻力的影响。结果表明, 无论低层大气为稳定层结还是不稳定层结, 大气中粘性的存在将减弱地形波的强度, 减小其产生的波动阻力。

关键词 地形波 波动阻力 粘性效应

1 引言

地形波引起的动量输送在全球大气动量平衡中起着不可忽视的作用, 这已被人们普遍接受^[1~3]。过去理论及模式研究全都假定大气是无粘的, 粘性的影响未予以考虑。这一方面是由于无粘假设得到的结果基本上可解释大多数观测到的过山气流现象; 另一方面也是由于理论研究上引入粘性项后的求解困难。

粘性在实际大气中总是存在的。粘性对过山气流的影响的研究目前尚不多见。我们采用文献[4]中描述粘性的方法, 即通过引入瑞利摩擦系数, 近似表示大气中的粘性效应, 探讨粘性耗散的本质。虽然瑞利摩擦项表达式是线性的, 不过它仍可定性描述粘性机制, 同时也为理论求解提供了方便。在两层大气模式中, 当低层大气为近中性或不稳定层结时, 采用瑞利摩擦来代替湍流摩擦。

本文通过求解包含线性粘性项的三维线性化大气波动方程, 讨论了两层大气模式中粘性效应对三维地形波及其波动阻力的影响。

2 加入粘性项的三维大气波动方程

考虑三维定常、绝热、不可压的线性化大气动力-热力学方程组 (x 轴取平均风方向):

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v u = - \bar{\theta} \frac{\partial \pi}{\partial x}, \quad (1)$$

1999-05-10 收到

* 国家自然科学基金和中国科学院“九五”重大A项目KZ951-A1-403资助

$$\bar{u} \frac{\partial v}{\partial x} + \nu v = -\bar{\theta} \frac{\partial \pi}{\partial y}, \quad (2)$$

$$\bar{u} \frac{\partial w}{\partial x} + \nu w = -\bar{\theta} \frac{\partial \pi}{\partial z} + \frac{g\theta}{\bar{\theta}}, \quad (3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (4)$$

$$\bar{u} \frac{\partial \theta}{\partial x} + w \frac{d\bar{\theta}}{dz} + \nu \theta = 0, \quad (5)$$

其中, u, v, w, θ 和 π 分别为风速分量、位温和 Exner 函数的扰动值, $\bar{u}$ 和 $\bar{\theta}(z)$ 分别表示平均风速和平均位温。 ν 为瑞利摩擦和牛顿冷却系数, 用来定性描述大气粘性。在 (5) 式中加入 $\nu\theta$, 主要是为了理论求解上的方便。

对 u, v, w, θ 和 π 作傅立叶变换, 即

$$[u, v, w, \theta, \pi] = [\tilde{u}(z), \tilde{v}(z), \tilde{w}(z), \tilde{\theta}(z), \tilde{\pi}(z)] \exp(ikx + ily), \quad (6)$$

其中, 带波纹号的量表示波数空间中的 Fourier 分量, k 和 l 分别表示 x 和 y 方向上的波数。

可得到垂直扰动速度 w 的 k 分量满足的方程为

$$\frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial z^2} + \frac{N^2 - (k\bar{u} - i\nu)^2}{(k\bar{u} - i\nu)^2} (k^2 + l^2) \cdot \tilde{w} = 0, \quad (7)$$

其中, $N^2 = \frac{g}{\bar{\theta}} \frac{d\bar{\theta}}{dz}$ 为 Brunt-Vaisala 频率。

(7) 式即为加入粘性项的三维大气波动方程。

3 大气粘性对稳定层结下地形波及其波动阻力的影响

假设大气由两层组成, 下层大气 Scorer 参数 $m = \left(\frac{1}{\bar{u}_1^2} \frac{g}{\bar{\theta}_1} \frac{d\bar{\theta}_1}{dz} \right)^{1/2}$ 具有较大的值;

而上层大气 Scorer 参数 $n = \left(\frac{1}{\bar{u}_2^2} \frac{g}{\bar{\theta}_2} \frac{d\bar{\theta}_2}{dz} \right)^{1/2}$ 具有较小的值。 $\beta = \bar{u}_2^2 / \bar{u}_1^2$ 表示两层平均风速的切变, 两层界面取为垂直坐标原点, 即 $z=0$ 处。

(7) 式在下层和上层大气中分别表示为

$$\frac{\partial \tilde{w}_1}{\partial z^2} + \frac{m^2}{(k - i\nu / \bar{u}_1)^2} (k^2 + l^2) \tilde{w}_1 = 0, \quad (8)$$

$$\frac{\partial \tilde{w}_2}{\partial z^2} + \frac{n^2}{(k - i\nu / \bar{u}_2)^2} (k^2 + l^2) \tilde{w}_2 = 0, \quad (9)$$

其中, 下标 1 和 2 分别表示下层和上层大气中的变量, $0 < k < \infty$, $-\infty < l < \infty$ 。假设 ν 随高度不变。

(8) 式和 (9) 式的通解为

$$\tilde{w}_1 = A \sin(\lambda z) + B \cos(\lambda z), \quad (10)$$

$$\tilde{w}_2 = C e^{\varepsilon z}, \quad (11)$$

其中, $\lambda = \sqrt{\left[\frac{m^2}{(k - i\nu/\bar{u}_1)^2} - 1 \right] (k^2 + l^2)}$, $\varepsilon = \sqrt{\left[\frac{n^2}{(k - i\nu/\bar{u}_2)^2} - 1 \right] (k^2 + l^2)}$, ε

的实部及虚部均要求为不小于零的实数, 否则得到的解无物理意义。(10) 和 (11) 中的系数 A 、 B 和 C 可由界面条件来确定。

在 $z=0$ 处界面条件有

$$\tilde{w}_1 = \tilde{w}_2, \quad (12)$$

$$\frac{\partial \tilde{w}_1}{\partial z} = \beta \frac{\partial \tilde{w}_2}{\partial z}. \quad (13)$$

下边界设在地表 $z = -h$ 处, 假设流线的垂直位移和地形起伏完全重合。地形廓线设为—钟形山:

$$\xi(x, y, -h) = H \frac{a^2}{x^2 + a^2} \frac{b^2}{y^2 + b^2}, \quad -\infty < x < \infty, \quad -\infty < y < \infty,$$

其中, H 为山高, a 和 b 分别表示 x 和 y 方向上的半山宽度。

根据线性化假设, 可得在地表 $z = -h$ 处,

$$\tilde{w}_1(k, l, -h) = ik\bar{u}_1 \cdot \frac{1}{2} H a b e^{-ak} e^{-bl}. \quad (14)$$

根据 (12)、(13) 和 (14) 可求得系数 A 、 B 和 C 。

三维钟形山引起的地形扰动垂直速度波数 k 分量在下层和上层大气中分别为

$$\tilde{w}_1 = ik\bar{u}_1 \cdot \frac{1}{2} H a e^{-ak} e^{-bl} \frac{\cos(\lambda z) + i(\beta\varepsilon/\lambda)\sin(\lambda z)}{\cos(\lambda h) - i(\beta\varepsilon/\lambda)\sin(\lambda h)}, \quad (15)$$

$$\tilde{w}_2 = ik\bar{u}_1 \cdot \frac{1}{2} H a e^{-ak} e^{-bl} \frac{e^{\varepsilon z}}{\cos(\lambda h) - i(\beta\varepsilon/\lambda)\sin(\lambda h)}. \quad (16)$$

在物理空间上垂直扰动速度为

$$w_1 = \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \tilde{w}_1 e^{i(kx + ly)} dk dl, \quad (17)$$

$$w_2 = \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \tilde{w}_2 e^{i(kx + ly)} dk dl. \quad (18)$$

上述两式可根据 Smith^[5] 给出的方法, 通过 FFT 或数值积分求得其数值。

下面通过实例计算, 讨论大气粘性效应对地形波的影响。

例 1: 取地形、大气条件如下: 山高 $H = 500$ m, 半山宽度 $a = b = 5$ km; 下层大气厚度 $h = 1000$ m, $d\bar{\theta}_1/dz = 0.5$ K/100 m, $\bar{u}_1 = 10$ m/s; 上层大气, $d\bar{\theta}_2/dz = 0.35$ K/100 m, $\bar{u}_2 = 16$ m/s; $m = 0.0013$ m⁻¹, $n = 0.0005$ m⁻¹, $\beta = 2.56$ 。图 1 给出在两层界面处 ($z=0$), v 取不同系数时地形引起的垂直扰动速度的分布图。由图 1 可以看

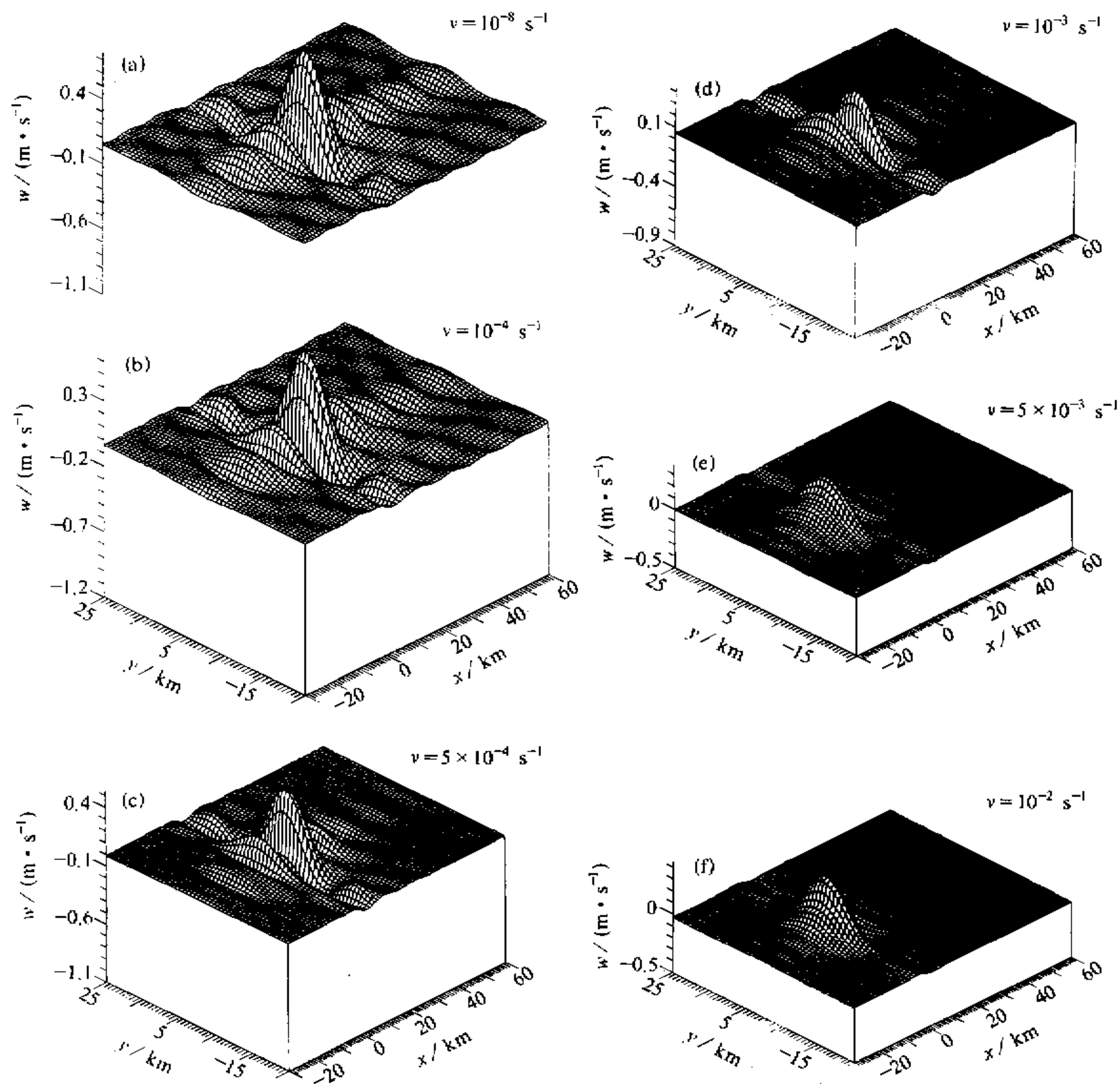


图1 稳定层结下, 界面 $z=0$ 处地形引起的垂直扰动速度的分布
(a) $\nu=10^{-8} \text{ s}^{-1}$; (b) $\nu=10^{-4} \text{ s}^{-1}$; (c) $\nu=5 \times 10^{-4} \text{ s}^{-1}$; (d) $\nu=10^{-3} \text{ s}^{-1}$; (e) $\nu=5 \times 10^{-3} \text{ s}^{-1}$; (f) $\nu=10^{-2} \text{ s}^{-1}$

出, 当 ν 取小于 10^{-4} s^{-1} 值时, 垂直扰动速度分布变化很小, 波动形态基本不变。随着 ν 值继续增大 (大于 10^{-4} s^{-1}), 波动振幅减弱, 当 ν 取大于或等于 10^{-2} s^{-1} 后, 波动基本消失。过山波除了振幅外, 波形基本一致, 过山波 (非拦截波部分) 波形受粘性影响不大。与 Hsu^[4]指出的一样, 粘性减弱重力内波的强度。改变大气条件, 粘性效应同样减弱地形波的强度, 阻碍其发展。

接下来讨论大气粘性对稳定层结下地形阻力的影响。根据线性化假定, 可以得到 $\tilde{u} = i[k/(k^2 + l^2)]\partial\tilde{w}/\partial z$, 于是, 地形扰动引起水平速度扰动分量为

$$\tilde{u}_1 = \frac{k^2}{k^2 + l^2} \bar{u}_1 \cdot \frac{1}{2} H a e^{-ak} e^{-b|l|} \frac{-\lambda \sin(\lambda z) + i\beta \epsilon \cos(\lambda z)}{\cos(\lambda h) - i(\beta \epsilon / \lambda) \sin(\lambda h)}, \quad (19)$$

$$\tilde{u}_2 = \frac{k^2}{k^2 + l^2} \bar{u}_1 \cdot \frac{1}{2} H a e^{-ak} e^{-b|l|} \frac{i\epsilon e^{i\epsilon z}}{\cos(\lambda h) - i(\beta \epsilon / \lambda) \sin(\lambda h)}, \quad (20)$$

其中, $\tilde{u}_1$ 和 $\tilde{u}_2$ 分别表示下层和上层大气扰动速度水平分量。

地形扰动引起的波动阻力 D 为

$$D = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u w dx dy, \quad (21)$$

其中, $u = \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{u} e^{i(kx + ly)} dk dl$, $w = \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{w} e^{i(kx + ly)} dk dl$ 。这样采用数值积分可求出波动阻力。

下面主要讨论在 $z=0$ 界面处的波动阻力。

例 2: 取例 1 相同的大气、地形条件。在 $z=0$ 界面处, 在 $4a \times 4b$ 区域上, 当 $\nu = 10^{-8} \text{ s}^{-1}$ 或 10^{-4} s^{-1} 时, 波动阻力基本相等, 此时平均阻力系数 $c_d = 9.4 \times 10^{-3}$; 当 $\nu = 10^{-3} \text{ s}^{-1}$ 时, $c_d = 6.7 \times 10^{-3}$; 当 $\nu = 10^{-2} \text{ s}^{-1}$ 时, $c_d = 5.8 \times 10^{-5}$, 此时波动阻力比 $\nu = 10^{-4} \text{ s}^{-1}$ 时小两个量级, 波动基本消失。

例 3: 讨论大气条件改变时, 粘性影响是否一致。下层 Scorer 参数 m 增大至 0.0015 m^{-1} , 其余参数均与例 1 相同。与无粘性情形一样, 对应相同 ν 值, 波动阻力随 m 增大而增大。当 $\nu = 10^{-4} \text{ s}^{-1}$ 时, $c_d = 1.1 \times 10^{-2}$; 当 $\nu = 10^{-3} \text{ s}^{-1}$ 时, $c_d = 7.8 \times 10^{-3}$ 。当 $\nu = 10^{-2} \text{ s}^{-1}$ 时, $c_d = 6.4 \times 10^{-5}$, 此时大气粘性同样减弱地形波的强度, 粘性增大, 波动阻力减小。

综上所述, 在稳定层结下大气粘性的存在, 将减弱地形波的强度, 粘性存在会减小波动阻力, 这与 Hsu^[4]发现表面摩擦阻碍地形波发展相一致。

4 粘性对不稳定层结下地形波及其波动阻力的影响

考虑两层大气模式, 设下层大气为不稳定层结 ($d\bar{\theta}_1/dz < 0$), 上层仍为稳定层结。令 $m = \left(-\frac{1}{\bar{u}_1^2} \frac{g}{\bar{\theta}_1} \frac{d\bar{\theta}_1}{dz} \right)^{1/2} > 0$, $n = \left(\frac{1}{\bar{u}_2^2} \frac{g}{\bar{\theta}_2} \frac{d\bar{\theta}_2}{dz} \right)^{1/2}$ 。两层界面取在 $z=0$ 处。 $\gamma = (g/\bar{u}^2)(\Delta\theta/\bar{\theta})$ 表示界面处两层之间的位温跃变。

(7) 式在下层和上层大气中分别表示为

$$\frac{\partial \tilde{w}_1}{\partial z^2} - \left[\frac{m^2}{(k - i\nu/\bar{u}_1)^2} + 1 \right] (k^2 + l^2) \tilde{w}_1 = 0, \quad (22)$$

$$\frac{\partial \tilde{w}_2}{\partial z^2} - \left[\frac{n^2}{(k - i\nu/\bar{u}_2)^2} + 1 \right] (k^2 + l^2) \tilde{w}_2 = 0. \quad (23)$$

方程 (22) 和 (23) 的通解为

$$\tilde{w}_1 = Ae^{\lambda z} + Be^{-\lambda z}, \quad (24)$$

$$\tilde{w}_2 = Ce^{i\epsilon z}, \quad (25)$$

其中, $\lambda = \sqrt{\left[\frac{m^2}{(k - i\nu/\bar{u}_1)^2} + 1\right](k^2 + l^2)}$, $\epsilon = \sqrt{\left[\frac{n^2}{(k - i\nu/\bar{u}_2)^2} - 1\right](k^2 + l^2)}$, ϵ

的实部及虚部均取不小于零的实数, 否则得到的解无物理意义。在下层不稳定层结中用瑞利摩擦来代替湍流摩擦。

界面及下边界条件为

$$\tilde{w}_1 = \tilde{w}_2, \quad z = 0, \quad (26)$$

$$\frac{\partial \tilde{w}_1}{\partial z} = \frac{k^2 + l^2}{(k - i\nu/\bar{u})^2} \gamma \tilde{w}_1 + \frac{\partial \tilde{w}_2}{\partial z}, \quad z = 0. \quad (27)$$

下边界同样假设在地表 $z = -h$ 处, 地形廓线仍设为一钟形山。根据线性假设可得到

$$\tilde{w}_1(k, l, -h) = ik\bar{u}_1 \cdot \frac{1}{2} H a b e^{-ak} e^{-b|l|}, \quad (28)$$

其中, H 为山高, a 和 b 分别表示 x 和 y 方向上的半山宽度, $0 < k < \infty$, $-\infty < l < \infty$ 。由 (26) ~ (28) 式可求得方程通解 (24) 和 (25) 式中的系数 A 、 B 和 C 。

垂直扰动速度波数 k 分量在下层和上层大气中分别为

$$\tilde{w}_1 = ik\bar{u}_1 \cdot \frac{1}{2} H a e^{-ak} e^{-b|l|} \frac{(1 + \alpha)e^{\lambda z} + (1 - \alpha)e^{-\lambda z}}{(1 + \alpha)e^{-\lambda h} + (1 - \alpha)e^{\lambda h}}, \quad (29)$$

$$\tilde{w}_2 = ik\bar{u}_1 \cdot \frac{1}{2} H a e^{-ak} e^{-b|l|} \frac{2e^{i\epsilon z}}{(1 + \alpha)e^{-\lambda h} + (1 - \alpha)e^{\lambda h}}, \quad (30)$$

其中, $\alpha = \frac{k^2 + l^2}{(k - i\nu/\bar{u})^2} \frac{\gamma}{\lambda} + \frac{i\epsilon}{\lambda}$ 。

根据线性化假定, $\tilde{u} = i[k/(k^2 + l^2)]\partial\tilde{w}/\partial z$, 可得到扰动速度水平分量 u 的波数 k 分量为

$$\tilde{u}_1 = \frac{k^2}{k^2 + l^2} \bar{u}_1 \cdot \frac{1}{2} H a e^{-ak} e^{-b|l|} \frac{\lambda(1 + \alpha)e^{\lambda z} - \lambda(1 - \alpha)e^{-\lambda z}}{(1 + \alpha)e^{-\lambda h} + (1 - \alpha)e^{\lambda h}}, \quad (31)$$

$$\tilde{u}_2 = \frac{k^2}{k^2 + l^2} \bar{u}_1 \cdot \frac{1}{2} H a e^{-ak} e^{-b|l|} \frac{2i\epsilon e^{i\epsilon z}}{(1 + \alpha)e^{-\lambda h} + (1 - \alpha)e^{\lambda h}}, \quad (32)$$

其中 $\tilde{u}_1$ 和 $\tilde{u}_2$ 分别表示下层和上层大气扰动速度水平分量。

波动阻力 D 表达式为

$$D = -\rho_0 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u w dx dy. \quad (33)$$

同样地, 根据 Smith^[5] 给出的方法, 利用 FFT 或数值积分可求得上述各式在物理空间上的数值。

下面首先通过实例来讨论大气粘性对地形波的影响。

例 4: 取地形和大气条件如下: 山高 $H=500$ m, 半山宽度 $a=b=5$ km; 下层大气厚度 $h=1000$ m, 下层大气 Scorer 参数 $m=0.0005$ m^{-1} , $\bar{u}_1=10$ m/s; 上层大气 Scorer 参数 $n=0.001$ m^{-1} , $\bar{u}_2=16$ m/s, $\gamma=0.001$ m^{-1} 。图 2 为对应不同 ν 值, 在 $z=0$ 界面处地形引起的垂直扰动速度的分布。与稳定层结下 (图 1) 一样, 当 ν 取 10^{-8} s^{-1} 或 10^{-4} s^{-1} 时, 地形波形态变化很小。随着粘性增大 (ν 值增大), 地形波强度减弱, 当 $\nu=10^{-2}$ s^{-1} 时, 波动基本消失。下层大气为不稳定层结时, 地形波振幅比稳定层结时小 (相同大气和地形条件, ν 值也相同)。改变大气条件, 粘性对地形波的影响基本相同。

最后, 讨论粘性对波动阻力的影响, 同样主要讨论在 $z=0$ 界面处的波动阻力。

例 5: 取地形、大气条件与例 4 完全相同。在 $z=0$ 界面处, 当 $\nu=10^{-8}$ s^{-1} 或

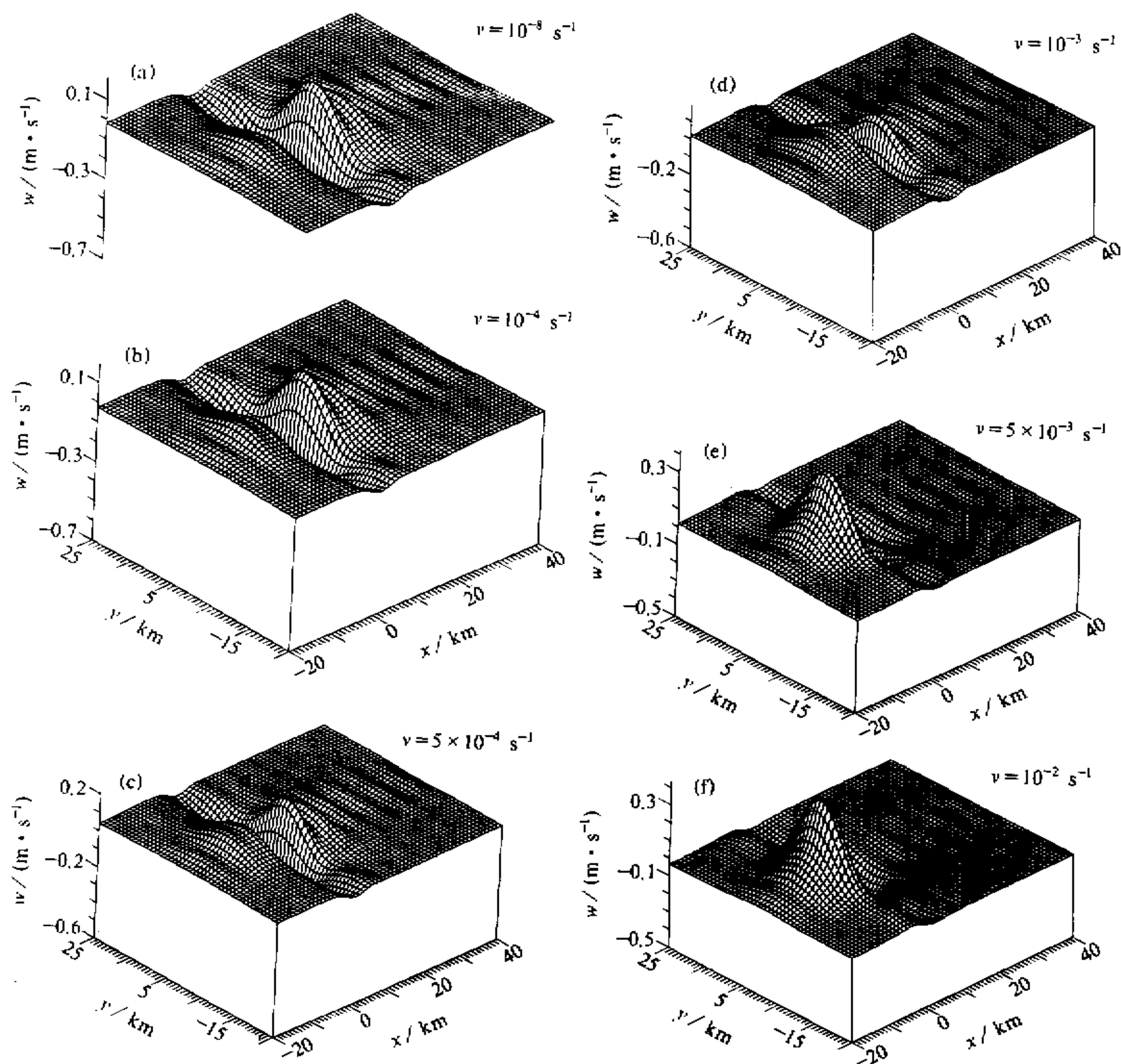


图 2 低层为不稳定层结时, 界面 $z=0$ 处地形引起的垂直扰动速度分布
(a) $\nu=10^{-8}$ s^{-1} ; (b) $\nu=10^{-4}$ s^{-1} ; (c) $\nu=5 \times 10^{-4}$ s^{-1} ; (d) $\nu=10^{-3}$ s^{-1} ; (e) $\nu=5 \times 10^{-3}$ s^{-1} ; (f) $\nu=10^{-2}$ s^{-1}

10^{-4} s^{-1} 时, 波动阻力基本一致, 此时 $c_d = 2.74 \times 10^{-3}$; 当 $\nu = 10^{-3} \text{ s}^{-1}$ 时, $c_d = 2.3 \times 10^{-3}$ 。当 $\nu = 10^{-2} \text{ s}^{-1}$ 时, $c_d = 3.6 \times 10^{-5}$, 波动基本消失。改变大气条件, 粘性对波动阻力的影响基本相同, 即随着粘性增大, 波动阻力减小, 这与稳定层结下粘性作用一致。

5 结论

本文采用两层大气模式, 通过引入瑞利摩擦系数来定性描述大气中粘性机制, 讨论了粘性效应对三维简单地形波及其波动阻力的影响。结果表明, 无论低层大气为稳定层结还是不稳定层结, 大气中粘性的存在将主要减弱地形波的强度, 减小其产生的波动阻力。本文主要对粘性的作用作了初步探讨, 采用线性系数表示粘性的方法毕竟与真实大气中粘性有差别, 应用于实际大气中应注意这一点, 同时瑞利摩擦与湍流摩擦的关系等有待于进一步研究。

参 考 文 献

- 1 McFarlane, N. A., 1987, The effect of orographically excited gravity wave drag on the general circulation of the lower stratosphere and troposphere, *J. Atmos. Sci.*, **44**, 1775~1800.
- 2 Miller, M. J., T. N. Palmer and R. Swinbank., 1989, Parameterization and influence of subgrid-scale orography in general circulation and numerical weather prediction models, *Meteor. Atmos. Phys.*, **44**, 84~109.
- 3 Palmer, T. N., G. J. Shutts and R. Swinbank., 1986, Alleviation of a systematic westerly bias in general circulation and numerical weather prediction models through an orographic gravity wave drag parameterization, *Quart. J. R. Meteor. Soc.*, **112**, 1001~1039.
- 4 Hsu, H. M., 1987, Study of linear steady atmospheric flow above a finite surface heating, *J. Atmos. Sci.*, **44**, 186~199.
- 5 Smith, R. B., 1980, Linear theory of stratified hydrostatic flow past an isolated mountain, *Tellus*, **32**, 348~364.

The Influences of the Atmospheric Viscosity on the Mountain Waves and Wave Drag Induced by a Three-Dimensional Isolated Terrain

Liu Huizhi and Hong Zhongxiang

(State Key Laboratory of Atmospheric Boundary Physics and Atmospheric Chemistry,
Institute of Atmospheric Physics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100029)

Sang Jianguo

(Department of Geophysics, Peking University, Beijing 100871)

Abstract The effect of the atmospheric viscosity on the mountain waves and wave drag has been discussed in a two-layer model. The studies show the atmospheric viscosity which represented by the linear Rayleigh friction is mainly to reduce the strength of the mountain waves.

Key words mountain wave wave drag viscous effect