第5卷 第2期
2000年6月
气候与环境研究
Climatic and Environmental Research
Vol. 5, No. 2
June 2000

# 水汽方程古典解的适定性研究

王必正

（中国科学院大气物理研究所大气科学和地球流体力学数值模拟国家重点实验室，北京 100029）

**摘 要** 对于球坐标系下的水汽方程，当考虑水汽的凝结或凝华过程时，利用水汽方程的特点得到了关于水汽方程的弱极值原理的较强形式。利用该弱极大值原理，证明了对于第一类、第二类和第三类边值问题，水汽方程解的唯一性和稳定性。利用Schauder方法，证明了对于第一类、第二类和第三类边值问题，$C^2$空间连续的水汽方程解的存在性。此外，还严格证明了水汽方程古典解的非负性。

**关键词**：唯一性；稳定性；存在性；非负解

## 1 引言

对于绝热而且无粘性的原始方程组，曾庆存[1]已系统地解决了初值问题的适定性。当考虑非绝热过程尤其是考虑水汽的相变过程的潜热释放以及非对流云的短波和长波辐射效应所产生的辐射加热和冷却过程时，大气的热力过程（含相变和云的辐射）和动力过程互相耦合。因此，研究解的适定性问题必须将大气的纯动力过程与水汽相变和云的辐射等过程综合在一起来研究。但是，非对流云的边界是随着时间与空间的变化而变化的，因此，是一个动边界的问题。处理动边界的问题，尤其是非对流云的动边界，迄今仍无实质性的进展。

本文利用极值原理研究水汽方程古典解的唯一性、稳定性和非负性，并利用先验估计证明解的存在性。由于水汽是全球分布问题，故采用球坐标。

## 2 球坐标下水汽方程的初边值问题

首先，假设速度场($v_\theta$，$v_\lambda$，$\dot\sigma$)是外作用项，不与水汽相变过程耦合；假设水汽凝结后，凝结物（水滴）或凝华物全部降落到地面，于是，水汽的凝结和凝华过程为

$$f(\theta, \lambda, \sigma, t)=\begin{cases}-\alpha(q-q_s), & 当q\geqslant q_s,\\ 0, & 当q<q_s,\end{cases} \tag{1}$$

其中，$\alpha$为函数且$\alpha\geqslant 0$，$f$为凝结量。故有下式成立：

$$f\leqslant 0, \tag{2}$$

$f$可能是不连续的，用磨光算子使其充分光滑。水汽预报方程为

1999-03-22收到，1999-04-28收到修改稿

* 本研究工作得到"国家重点基础研究发展规划"G1998040900项目第一部分和国家自然科学基金资助项目49805005和49735160的资助

$$L[q]=\frac{k_H}{a^2}\Delta_2 q+\frac{k_v}{H^2}\frac{\partial^2 q}{\partial\sigma^2}-\frac{v_\theta}{a}\frac{\partial q}{\partial\theta}-\frac{v_\lambda}{a\sin\theta}\frac{\partial q}{\partial\lambda}-\dot{\sigma}\frac{\partial q}{\partial\sigma}-\frac{\partial q}{\partial t}=-f, \tag{3}$$

其中，等号右边第2项为垂直湍流交换项近似:

$$\frac{g}{p_s}\frac{\partial}{\partial\sigma}\left(\frac{\rho^2 g}{p_s}k_v\frac{\partial}{\partial\sigma}\right)\approx\frac{k_v}{H^2}\frac{\partial^2}{\partial\sigma^2},$$

(3) 式中 $q$ 的定义域 $\Omega$ 为

$$\Omega=\{(\theta,\lambda,\sigma,t):\ 0<\varepsilon<\theta\leqslant\pi-\varepsilon,\ 0\leqslant\lambda\leqslant 2\pi,\ 0\leqslant\sigma\leqslant 1,\ 0<t\leqslant T,\ \varepsilon\text{为小于}\pi\text{的任意小正数}\}. \tag{4}$$

注意 $\Omega$ 为4维区域，定义 $t=0$ 的区域为 $B$，$t=T$ 的区域为 $B_T$ 和 $0\leqslant t\leqslant T$ 的带形流形为 $S$

$$S=\{\theta=\varepsilon,0\leqslant\sigma\leqslant 1\}\cup\{\theta=\pi-\varepsilon,0\leqslant\sigma\leqslant 1\}\cup\{\sigma=0,\varepsilon\leqslant\theta\leqslant\pi-\varepsilon\}\cup\{\sigma=1,\varepsilon\leqslant\theta\leqslant\pi-\varepsilon\}, \tag{5}$$

于是有

$$\partial\Omega=B+B_T+S.$$

(4)、(5) 式中取 $\varepsilon>0$ 的目的，是为了去掉南北极的奇异点。约定 $S$ 的外法向为 $n$，并且 $0\leqslant t\leqslant T$ 表示 $(v_\theta, v_\lambda, \dot{\sigma})$ 可不计相变影响的时段。极区问题是由于采用球坐标引起的。根据苏步青等[2]的论述，球面是紧致的，而平面坐标 $(x, y)$ 对应于平面是非紧致的，故球面不与平面（或平面的开子集）拓扑同胚。所以，任何坐标系在处理球面问题时必须将球面分块，然后用流形的办法去处理。这也解释了处理极区问题的困难。

有了以上的准备，就可以提出如下的初边值问题:

### 2.1 第一初边值问题

$$\begin{cases} L[q]=-f, \\ q|_s=g(Q,t)=g, \qquad Q\in s, \\ q|_{t=0}=\varphi, \end{cases} \tag{6}$$

式中，$q$ 的定义域为 $\Omega$，且 $q\in C^2(\Omega)$，$g$ 为由观测给出的边值，$\varphi$ 为 $t=0$ 时的观测初值，均设为已知。

### 2.2 第二、三初边值问题

$$\begin{cases} L[q]=-f, \\ \left(\frac{\partial}{\partial n}+\beta q\right)\Big|_s=h, \\ q|_{t=0}=\varphi, \end{cases} \tag{7}$$

式中，$q$ 的定义域为 $\Omega$，且 $q\in C^2(\Omega)$，$h$ 由观测给出，$\varphi$ 为观测给出的初始值。

## 3 弱极值定理、第一初边值解的唯一性和稳定性

首先，证明弱极值定理。

**定理 1**　如果第一初边值问题（6）满足：（A）$k_H>0$, $k_v>0$;（B）$L[q]$的系数在 $\Omega$ 中连续，则有

$$\max_{\bar{\Omega}} q=\max_{B+S} q. \tag{8}$$

(8) 式的物理意义是水汽的最大值在边界上取到。这与实际大气的水汽分布相符合。事实上，下边界的蒸发和升华及湍流过程等的水汽输送是大气水汽的源，而且最大水汽值在热带海表温度高的区域。

**证明**：首先假设 $f<0$，则

$$L[q]=-f>0. \tag{9}$$

再考察$L[q]$的具体表达式：

$$L[q]=\frac{k_H}{a^2}\left[\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2}\right]q+\frac{k_v}{H^2}\frac{\partial^2 q}{\partial\sigma^2}+\frac{k_H}{a^2}\cot\theta\frac{\partial q}{\partial\theta}-\frac{v_\theta}{a}\frac{\partial q}{\partial\theta}$$
$$-\frac{v_\lambda}{a\sin\theta}\frac{\partial q}{\partial\lambda}-\dot{\sigma}\frac{\partial q}{\partial\sigma}-\frac{\partial q}{\partial t}. \tag{10}$$

如果 $q$ 在 $\Omega$ 内$p_0$点取到最大值，$p_0$坐标为$(\theta_0,\ \lambda_0,\ \sigma_0,\ t_0)$

$$\left.\frac{\partial^2 q}{\partial\theta^2}\right|_{p_0}\leqslant 0,\quad \left.\frac{\partial^2 q}{\partial\lambda^2}\right|_{p_0}\leqslant 0,\quad \left.\frac{\partial^2 q}{\partial\sigma^2}\right|_{p_0}\leqslant 0,\quad \left.\frac{\partial q}{\partial\theta}\right|_{p_0}=\left.\frac{\partial q}{\partial\lambda}\right|_{p_0}=\left.\frac{\partial q}{\partial\sigma}\right|_{p_0}=0.$$

且

$$\left.\frac{\partial q}{\partial t}\right|_{p_0}=0,\qquad 当p_0为\Omega的内点,$$

或

$$\left.\frac{\partial q}{\partial t}\right|_{p_0}\geqslant 0,\qquad t_0=T\qquad 当p_0为\Omega中t_0=T的边界点.$$

利用以上各式，可知

$$L[q]|_{p_0}\leqslant 0. \tag{11}$$

这与（9）矛盾。因此，$L[q]$不能在 $\Omega$ 内及$t=T$上取最大值。但$L[q]$在 $\Omega$ 上连续，故在 $\Omega$ 上必有最大值，故最大值必能在中边界上取到。

在$f\leqslant 0$时，则

$$L[q]=-f\geqslant 0. \tag{12}$$

再作辅助函数

$$w=q-\delta t, \tag{13}$$

(13) 式中 $\delta$ 为任意小正数，则

$$L[w]=L[q]+\delta=-f+\delta>0, \tag{14}$$

因此，上面 $f<0$ 的结论可用到 $w$，有

$$\max_{\bar{\Omega}} w = \max_{B+S} w$$

故

$$\max_{\bar{\Omega}} = \max_{\bar{\Omega}} q(w+\delta t) \leqslant \max_{\bar{\Omega}} w + \delta t$$

$$= \max_{B-S} w + \delta t \leqslant \max_{B+S}(q-\delta t) + \delta t \leqslant \max_{B+S} q + \delta t \tag{15}$$

令（15）式中$\delta \to 0^+$，有

$$\max_{\bar{\Omega}} q = \max_{B+S} q \tag{16}$$

证毕。

以上证明与 Friedman[3]的经典证明类似，但不同之处在于水汽的凝结和凝华项 $f = -\alpha(q-q_s) \leqslant 0$且 $f$连续，避免了讨论一次项 $\alpha q$，因此，结论比 Friedman 给出的更合理。

利用定理 1，可得到最大模估计，即:

**定理 2** 如果定理 1 条件满足，则有

$$\max_{\bar{\Omega}} |q| \leqslant FT + H, \tag{17}$$

(17) 式中

$$F = \sup_{\Omega内} |f|, \qquad H = \max\left\{\sup_{B} |\varphi| + \sup_{S} |g|\right\}. \tag{18}$$

**证明：** 作辅助函数

$$w = -Ft - H \pm q, \tag{19}$$

将（19）代入$L[w]$，有

$$L[w] = F \pm L[q] = F \pm f \geqslant 0, \tag{20}$$

$$w|_{B+S} = (-Ft \pm q)_{B+S}| \leqslant (-H \pm q)|_{B+S} \leqslant 0, \tag{21}$$

利用（20）式，从定理 1 可推出

$$\max_{\bar{\Omega}} w \leqslant \max_{B+S} w|_{B+S},$$

再利用（21），有

$$\max_{\bar{\Omega}} w \leqslant 0, \tag{22}$$

故

$$-Ft - H \pm q \leqslant 0,$$

即

$$\pm q \leqslant Ft + H \leqslant FT + H, \tag{23}$$

故

$$\max_{\bar{\Omega}} |q| \leqslant FT + B.$$

证毕。

定理 2 的证明，参考了姜礼尚、陈亚浙[4]的证明方法。

利用定理 2，可证明如下的定理 3（解的唯一性）和定理 4（解的稳定性）。

**定理 3**　如果（1）第一初边值问题满足定理 1 条件；（2）方程（6）有另一个解$q_1$使得

$$\begin{cases} L[q_1]=f, \\ q_1|_s=g, \\ q_1|_{t=0}=\varphi, \end{cases} \tag{24}$$

则$q\equiv q_1$，即解是唯一的。

**证明**：将（6）减去（24），有

$$\begin{cases} L[q-q_1]=0, \\ (q-q_1)|_s=0, \\ (q-q_1)|_{t=0}=0, \end{cases} \tag{25}$$

利用定理 2 的最大模估计，因$f=0$，$g=0$，$\varphi=0$，故

$$\max_{\bar{\Omega}}|q-q_1|=0. \tag{26}$$

故有

$$q=q_1.$$

由此证明了解的唯一性。

**定理 4**　如果定理 1 条件对$q_1$、$q_2$都满足，并且

$$\begin{cases} L[q_1]=f_1, \\ q_1|_s=g_1, \\ q_1|_{t=0}=\varphi_1, \end{cases} \quad 及 \quad \begin{cases} L[q_2]=f_2, \\ q_2|_s=g_2, \\ q_2|_{t=0}=\varphi_2, \end{cases} \tag{27}$$

则当

$$\sup_{\Omega内}|f_1-f_2|<\delta, \qquad \sup_{S}|g_1-g_2|<\delta, \qquad \sup_{B}|\varphi_1-\varphi_2|<\delta \tag{28}$$

满足时，有估计式：

$$\max_{\bar{\Omega}}|q_1-q_2|\leqslant T\delta+\delta=(T+1)\delta. \tag{29}$$

**证明**：将（27）两组公式相减有

$$\begin{cases} L[q_1-q_2]=f_1-f_2, \\ (q_1-q_2)|_s=g_1-g_2, \\ (q_1-q_2)|_{t=0}=\varphi_1-\varphi_2, \end{cases} \tag{30}$$

利用定理 3，有

$$\max_{\bar{\Omega}}|q_1-q_2|=\max_{B-S}|q_1-q_2|\leqslant FT+B\leqslant T\delta+\delta=(T+1)\delta. \tag{31}$$

证毕。

利用定理 4，任取 $\varepsilon>0$，有 $\delta=\dfrac{\varepsilon}{T+2}>0$，当 (28) 成立时，利用 (29) 有

$$\max_{\bar{\Omega}}|q_1-q_2|\leqslant(T+1)\delta=\frac{T+1}{T+2}\varepsilon<\varepsilon \tag{32}$$

(32) 式即表明解对初边值最大模意义下的稳定性。

## 4 第二和第三初边值解的唯一性和稳定性

从上一节可以看到，证明解的唯一性和稳定性，本质上只用到最大模估计。如果对第二和第三边值问题证明了最大模估计，也就证明了解的唯一性和稳定性。

**定理 5** 如果 (1) 定理 1 条件满足；(2) $\beta\geqslant\beta_0>0$，则有第二和三初边值问题 (7) 的最大模估计：

$$\max_{\bar{\Omega}}|q|\leqslant FT+H, \tag{33}$$

(33) 式中，

$$F=\sup_{\Omega\text{内}}|f|,\qquad H=\max\left\{\frac{1}{\beta_0}\max_{S}|h|\right\}.$$

**证明**：作辅助函数 $w=-Ft-H\pm q$，则

$$L[w]=F\pm f\geqslant 0, \tag{34}$$

$$w|_B=(-H\pm q)|_B=-H\pm\varphi\leqslant 0, \tag{35}$$

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial w}{\partial n}+\beta w\right)\Big|_s&=\left[\pm\frac{\partial q}{\partial n}\pm\beta q+\beta(-Ft-H)\right]\Big|_s\\&=[\pm g+\beta(-Ft-H)]|_s\leqslant(\pm g-HB)|_s\\&\leqslant(\pm g-H\beta_0)|_s\leqslant 0.\end{aligned} \tag{36}$$

从 (34) 可知，$w$ 最大值在 $B+S$ 上取到。因为 $w|_B\leqslant 0$，故如果在 $S$ 上取到 $w$ 的正的最大值，则该点 $P_0\in s$ 有

$$\frac{\partial w}{\partial n}\Big|_{p_0}\geqslant 0,\qquad \beta w|_{p_0}>0, \tag{37}$$

从 (37) 可推出

$$\left(\frac{\partial w}{\partial n}+\beta w\right)\Big|_{p_0}>0,$$

上式与 (36) 式矛盾，故 $S$ 上不能取到 $w$ 的正的最大值，从而

$$w|_{B+S}\leqslant 0, \tag{38}$$

故

$$\max_{\bar{\Omega}} w\leqslant\max_{B+S} w\leqslant 0, \tag{39}$$

即得

$$-Ft-H\pm q\leqslant 0, \tag{40}$$

故

$$\max_{\bar{\Omega}}|q| \leqslant Ft + H \leqslant FT + H. \tag{41}$$

证毕。

## 5　第一初边值解的存在性

现研究区域 Ω 上的第一初边值解的存在性问题：

$$L[q] = \frac{k_H}{a^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}q + \frac{k_H}{a^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2}q + \frac{k_v}{H^2}\frac{\partial^2 q}{\partial\sigma^2} + \left(\frac{k_H\cot\theta}{a^2} - \frac{v_\theta}{a}\right)\frac{\partial q}{\partial\theta} - \frac{v_\lambda}{a\sin\theta}\frac{\partial q}{\partial\lambda}$$

$$- \dot{\sigma}\frac{\partial q}{\partial\sigma} - \frac{\partial q}{\partial t} = f = \alpha(q - q_s), \tag{42}$$

$$q|_s = g, \tag{43}$$

$$q|_{t=0} = \varphi. \tag{44}$$

在以下的证明中，函数 $f$ 可以通过磨光算子将其光滑化。为了方便，写成（42）式形式，当 $q < q_s$ 时，取 $\alpha = 0$。可采用 Schauder 型估计方法来证明如下定理 6。

**定理 6**　如果下列条件满足：

（A）对任何 $(\theta, \lambda, \sigma, t) \in \Omega$ 及任何三维向量 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$，有

$$\frac{k_H}{a^2}x_1^2 + \frac{k_H}{a^2\sin^2\theta}x_2^2 + k_v x_3^2 \geqslant k_2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) \qquad (k_2 > 0); \tag{45}$$

（B）$L[q]$ 的系数以及 $\alpha$ 在 Ω 内一致 Holder 连续，并且指数为 $0 < r < 1$，且

$$\left|\overline{\frac{k_H}{a^2}}\right|_r \leqslant \bar{k}_1, \quad \left|\overline{\frac{k_H}{a^2\sin^2\theta}}\right|_r \leqslant \bar{k}_1 \left|\overline{\frac{k_v}{H^2}}\right|_r \leqslant \bar{k}_1,$$

$$\left|\overline{\frac{k_H\cot\theta}{a^2} - \frac{v_\theta}{a}}\right|_r \leqslant \bar{k}_1 \left|\overline{\frac{k_\lambda}{a\sin\theta}}\right|_r \leqslant \bar{k}_1, \quad |\bar{\dot{\sigma}}|_r \leqslant \bar{k}_1,$$

$$|\bar{\alpha}|_r \leqslant \bar{k}_1;$$

（C）$-\alpha q_s$ 在 Ω 内一致 Holder 连续，并且 $|\overline{-\alpha q_s}|_r < \infty$；

（D）区域 Ω 有性质 $\bar{\bar{E}}$，并且在带形 $S$ 上，当 $\varphi \in \overline{C}^{2+r}$ 时，$L\varphi|_s = f$ 成立；

（E）$\varphi \in \overline{C}^{2+r}(\Omega)$。

则有唯一解 $q$ 存在，而且 $q \in \overline{C}^{2+r}(\Omega)$。

详细符号定义及证明，已由 Friedman[2] 给出。

总之，对于第一初边值问题，利用弱极值原理及 Schauder 估计方法，证明了水汽方程古典解的唯一性、稳定性和存在性，条件是 $0 \leqslant t \leqslant T$ 时段内流场 $(v_\theta, v_\lambda, \dot{\sigma})$ 可以不计相变的影响。所以，证明的结论对大气环流模式的实际计算是有意义的。在 $0 \leqslant t \leqslant T$ 时段内，求解水汽方程，在古典意义上完全是适定的。

## 6 第二、三初边值解的存在性

重新写出（7）式为

$$\begin{cases} L[q]=-f=\alpha(q-q_s), \\ \left(\dfrac{\partial}{\partial n}+\beta q\right)\Big|_s=h \qquad (\beta\geqslant 0), \\ q|_{t=0}=\varphi, \end{cases} \tag{46}$$

(46) 式即为第二和第三边值问题。

**定理 7** 如果（46）式满足:（A）$L$ 在 $\Omega$ 上为抛物的;（B)）$L$ 的系数和 $\alpha$ 为 Holder 连续;（C）$-\alpha q_s$ 在$\overline{\Omega}$上一致 Holder 连续;（D）$H$ 在$S\times[0,T]$上连续，$\varphi$ 在$\overline{B}$上连续，且在$\partial B$的某个 $B$ 的邻域内为零，，则存在唯一解 $q$。

证明见文献[3]。

这个结论，对于大气环流模式更有实用价值。由于在下边界，水汽往往是第二和第三类边界条件，故在时段$0\leqslant t\leqslant T$内（不计流场受水汽影响），定理 7 给出了水汽方程的存在性，表明在古典意义下，水汽方程是适定的。

## 7 非负水汽的证明

在物理意义上，水汽是非负的。如果能从数学上严格证明水汽 $q$ 是非负的，是很有意义的。因为这一方面说明水汽方程正确描述了物理现象，另一方面也从理论上指出了在设计数值模式时或进行研究理论时一定不要破坏这个性质（非负性）。下面将证明定理 8。

**定理 8** 对第一初边值问题（6），若初始条件$\varphi\geqslant 0$和边值$q\geqslant 0$得到满足（这二个条件是物理约束），则对于区域 $\Omega$ 而言$q\geqslant 0$（即水汽是非负的）。

**证明**:

(1) 如果

$$q\geqslant q_s \tag{47}$$

满足，则依

$$q_s=0.622e_s(T)/p, \tag{48}$$

并从文献[5]可知，在实际大气中，有

$$p>0. \tag{49}$$

而

$$e_s(T)=611.0\times 10^{8.6(T-273.16)/T},$$

但从热力学第二定律可知$T>0\,\mathrm{K}$，故

$$e_s(T)>0 \tag{50}$$

成立，从（47）+（48）+（49）可推知

$$q_s > 0, \tag{51}$$

从而

$$q \geqslant q_s > 0. \tag{52}$$

（2）如果$q < q_s$，则 $f=0$，故有

$$L[q] = 0 \tag{53}$$

从而由文献[3]可知

$$q \geqslant 0 \tag{54}$$

成立。

综合（1）和（2），可知在区域 Ω，（54）成立。

同样可证对于第二、三边值问题水汽方程古典解的非负性，限于篇幅，故不赘述。

# 8 结论

本文对水汽方程证明了如下结论：

（1）利用弱大值原理，证明了对于第一、第二和第三类边值问题，水汽方程解的唯一性和稳定性。

（2）利用 Schauder 方法，证明了对于第一、第二和第三边值问题，$C^2$ 空间连续的水汽方程解的存在性。

（3）严格证明了水汽方程古典解的非负性。

**致　谢**：本文得到曾庆存院士的悉心指导，吴永辉博士多次参与讨论并提供宝贵意见，深表感谢。

## 参 考 文 献

1　曾庆存，数值天气预报的数学物理基础，第一卷，北京：科学出版社，1979.
2　苏步青等，微分几何，北京：人民教育出版社，1979.
3　Friedman A., *Partial Differential Equations of Parabolic Type*, Prentice-Hall, Inc., 1964.
4　姜礼尚，陈亚浙，数学物理方程讲义，北京：高等教育出版社，1985.
5　Landau and Lifshtz, *Statistical Physics, Course of Theoretical Physics*, 3rd Edition, Part I, Vol.5, Pergamon Press, 1982.

# The Well−Posed Problems of The Classic Solution of Water Vapour Equation

Wang Bizheng

(*State Key Laboratory of Numerical Modeling for Atmospheric Sciences and Geophysical Fluid Dynamics, Institute of Atmospheric Physics, Chinese Academy of Sciences, Beijing* 100029)

**Abstract** The well−posed problems of water vapour equation with condensation process were studied. By using the weak maximum principle, the uniqueness and stability of the solution of water vapour equation with the first, second and third boundary−value problems were proven. By using Schauder's method, the existence of class $C_2$solution of water vapour equation with the first, second and third boundary−value problems were proven. At last, it was proven that the classic solution of water vapour equation is non−negative.

**Key words**: uniqueness; stability; existence; non−negative solution