第6卷 第1期　　气 候 与 环 境 研 究　　Vol. 6 No. 1
2001 年 3 月　　Climatic and Environmental Research　　Mar. 2001

发展方程计算稳定性的比较分析*

林万涛　　季仲贞
(中国科学院大气物理研究所大气科学和地球流体力学数值模拟国家重点实验室，北京 100029)
杨晓忠
(华北电力大学，北京 102206)

摘　要　针对线性与非线性发展方程的几种差分格式，以一维线性和非线性平流方程为例，对线性与非线性发展方程差分格式的计算稳定性进行了比较分析，揭示了差分格式结构和初值形式与非线性计算稳定性的关系。

关键词：发展方程；差分格式；计算稳定性；初值

1　引言

气候数值模拟、数值天气预报和海流数值模拟都可以归结为对发展方程的数值求解。因此，如何保证所用的差分格式长时间计算稳定是十分重要的。Von Neumann 首先用 Fourier 分析的方法给出了线性发展方程差分格式的计算稳定性判据[1]。之后，Hirt[2]又提出了一种分析线性发展方程差分格式的计算稳定性的方法，即启发性分析方法。到目前为止，线性发展方程差分格式的计算稳定性的问题已基本解决。对于非线性发展方程差分格式的计算稳定性的问题，至今尚未找到一种普遍的判定方法。曾庆存、季仲贞、王斌[3~6]系统地研究了非线性发展方程差分格式的计算不稳定问题，探讨了产生非线性计算不稳定的原因。本文以一维线性和非线性平流方程为例，通过对线性与非线性发展方程差分格式计算稳定性的比较分析，揭示了差分格式结构和初值形式与非线性计算稳定性的关系。

2　方程和差分格式

考虑一维线性平流方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}+U\frac{\partial u}{\partial x}=0, \qquad U>0,\ a\leqslant x\leqslant b,\ 0\leqslant t\leqslant T, \tag{1}$$

$$u(x,0)=\varphi(x) \tag{2}$$

和一维非线性平流方程

1999-12-07 收到，2000-07-14 收到修改稿
* 国家自然科学基金资助项目49905007、49975020和国家杰出青年科学基金项目49825109及国家优秀重点实验室项目 40023001 共同资助

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}=0,\qquad a\leqslant x\leqslant b,\ 0\leqslant t\leqslant T,\tag{3}$$

$$u(x,0)=\varphi(x).\tag{4}$$

对问题（1）、（2）及（3）、（4），采用如下差分格式：

格式1：FTBS 格式

$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\Delta t}+\frac{U}{\Delta x}(u_j^n-u_{j-1}^n)=0.\tag{5}$$

格式2：Lax–Wendroff 格式

$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\Delta t}+\frac{U}{2\Delta x}(u_{j+1}^n-u_{j-1}^n)-\frac{U^2\Delta t}{2\Delta x^2}(u_{j+1}^n-2u_j^n+u_{j-1}^n)=0.\tag{6}$$

格式3：FTBS 格式

$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\Delta t}+\frac{u_j^n}{\Delta x}(u_j^n-u_{j-1}^n)=0.\tag{7}$$

格式4：Lax–Wendroff 格式

$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\Delta t}+\frac{u_j^n}{2\Delta x}(u_{j+1}^n-u_{j-1}^n)-\frac{(u_j^n)^2\Delta t}{2\Delta x^2}(u_{j+1}^n-2u_j^n+u_{j-1}^n)=0.\tag{6}$$

3 差分格式稳定性的启发性分析

首先，对线性平流方程的差分格式1、2进行稳定性的启发性分析。以格式2为例，将（6）式作 Taylor 展开可得

$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\Delta t}=\frac{\partial u_j^n}{\partial t}+\frac{\partial^2 u_j^n}{\partial t^2}\Delta t+\frac{1}{6}\frac{\partial^3 u_j^n}{\partial t^3}\Delta t^2+\frac{1}{24}\frac{\partial^4 u_j^n}{\partial t^4}\Delta t^3+O(\Delta t^4),\tag{9}$$

$$\frac{U}{2\Delta x}(u_{j+1}^n-u_{j-1}^n)=U\left(\frac{\partial u_j^n}{\partial x}+\frac{1}{6}\frac{\partial^3 u_j^n}{\partial x^3}\Delta x^2\right)+O(\Delta x^4),\tag{10}$$

$$\frac{U^2\Delta t}{2\Delta x^2}(u_{j+1}^n-2u_j^n+u_{j-1}^n)=\frac{U^2}{2}\frac{\partial^2 u_j^n}{\partial x^2}\Delta t+\frac{U^2\Delta x^2}{24}\frac{\partial^4 u_j^n}{\partial x^4}\Delta t+(\Delta x^4).\tag{11}$$

把（9）～（11）式代入（6）式，略去上下标可得

$$\frac{\partial u}{\partial t}+U\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{2}\Delta t\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-U^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)-\frac{1}{6}\left(\Delta t^2\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}+U\Delta x^2\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)$$
$$-\frac{1}{24}\Delta t\left(\Delta t^2\frac{\partial^4 u}{\partial t^4}+U^2\Delta x^2\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right)+O(\Delta t^4,\Delta x^4).\tag{12}$$

（12）式对t微分两次得

$$\Delta t^2\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}=-U\Delta t^2\frac{\partial^3 u}{\partial t^2\partial x}-\frac{1}{2}\Delta t^3\left(\frac{\partial^4 u}{\partial t^4}-U^2\frac{\partial^4 u}{\partial t^2\partial x^2}\right)+O(\Delta t^4,\Delta t^2\Delta x^2). \tag{13}$$

(12) 式对t和x各微分一次，可得

$$U\Delta t^2\frac{\partial^3 u}{\partial t^2\partial x}=-U^2\Delta t^2\frac{\partial^3 u}{\partial t\partial x^2}-\frac{1}{2}U\Delta t^3\left(\frac{\partial^4 u}{\partial t^3\partial x}-U^2\frac{\partial^4 u}{\partial t\partial x^3}\right)+O(\Delta t^4,\Delta t^2\Delta x^2). \tag{14}$$

(12) 式对x微分两次，得

$$U^2\Delta t^2\frac{\partial^3 u}{\partial t\partial x^2}=-U^3\Delta t^3\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}-\frac{1}{2}U^2\Delta t^3\left(\frac{\partial^4 u}{\partial t^2\partial x^2}-U^2\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right)+O(\Delta t^4,\Delta t^2\Delta x^2). \tag{15}$$

(12) 式对t微分三次，得

$$\begin{aligned}\Delta t^3\frac{\partial^4 u}{\partial t^4}&=-U\Delta t^3\frac{\partial^4 u}{\partial t^3\partial x}+O(\Delta t^4,\Delta t^2\Delta x^2)\\&=U^2\Delta t^3\frac{\partial^4 u}{\partial t^2\partial x^2}+O(\Delta t^4,\Delta t^2\Delta x^2)\\&=-U^3\Delta t^3\frac{\partial^4 u}{\partial t\partial x^3}+O(\Delta t^4,\Delta t^2\Delta x^2)\\&=U^4\Delta t^3\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}+O(\Delta t^4,\Delta t^2\Delta x^2).\end{aligned} \tag{16}$$

由（13）～（16）可得

$$-\frac{1}{6}\left(\Delta t^2\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}+U\Delta x^2\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)=\frac{1}{6}U(U^2\Delta t^2-\Delta x^2)\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}+O(\Delta t^4,\Delta t^2\Delta x^2), \tag{17}$$

$$-\frac{1}{24}\Delta t\left(\Delta t^2\frac{\partial^4 u}{\partial t^4}-U^2\Delta x^2\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right)=\frac{1}{24}U^2\Delta t(U^2\Delta t^2-\Delta x^2)\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}+O(\Delta t^4,\Delta t^2\Delta x^2). \tag{18}$$

把（17）、（18）代入（12）再分别对t和x进行微分可得

$$-\frac{1}{2}\Delta t\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-U^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)=\frac{1}{6}U^2\Delta t(U^2\Delta t^2-\Delta x^2)\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}+O(\Delta t^4,\Delta t^2\Delta x^2). \tag{19}$$

将（17）、（18）、（19）代入（12）便可得到格式 2 的修正微分方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}+U\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{6}U(U^2\Delta t^2-\Delta x^2)\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}+\frac{1}{8}U^2\Delta t(U^2\Delta t^2-\Delta x^2)\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}+O(\Delta t^4,\Delta t^2\Delta x^2). \tag{20}$$

由（20）可知，格式 2 的二阶耗散系数为 0，四阶耗散系数为

$$\mu_{2r}=\frac{1}{8}U^2\Delta t(U^2\Delta t^2-\Delta x^2),\qquad r=2. \tag{21}$$

同样地，可求出格式 1 的修正微分方程:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+U\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{2}U(U\Delta t-\Delta x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{1}{6}U(U\Delta t-\Delta x)(2U\Delta t-\Delta x)\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}$$
$$+O(\Delta t^3,\Delta t\Delta x^2). \tag{22}$$

二阶耗散系数为

$$\mu_{2r}=-\frac{1}{2}U(U\Delta t-\Delta x),\qquad r=1. \tag{23}$$

格式 1、2 稳定的充分必要条件为[7]

$$(-1)^{r-1}\mu_{2r}>0. \tag{24}$$

于是，有以下定理:

定理 1 一维线性平流方程差分格式 1（FTBS 格式）和格式 2（Lax–Wendroff 格式）计算稳定的充分必要条件为

$$U\frac{\Delta t}{\Delta x}\leqslant 1. \tag{25}$$

下面对非线性平流方程的差分格式 3、4 进行稳定性的启发性分析。以格式 4 为例，将（8）式作 Taylor 展开可得

$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\Delta t}=\frac{\partial u_j^n}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u_j^n}{\partial t^2}\Delta t+\frac{1}{6}\frac{\partial^3 u_j^n}{\partial t^3}\Delta t^2+O(\Delta t^3), \tag{26}$$

$$\frac{u_j^n}{2\Delta x}(u_{j+1}^n-u_{j-1}^n)=u_j^n\left(\frac{\partial u_j^n}{\partial x}+\frac{1}{6}\frac{\partial^3 u_j^n}{\partial x^3}\Delta x^2\right)+O(\Delta x^3), \tag{27}$$

$$\frac{(u_j^n)^2\Delta t}{2\Delta x^2}(u_{j+1}^n-2u_j^n+u_{j-1}^n)=\frac{(u_j^n)^2}{2}\frac{\partial^2 u_j^n}{\partial x^2}\Delta t++(\Delta x^2). \tag{28}$$

把（26）～（28）式代入（8）式，略去上下标可得

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{2}\Delta t\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-u^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)-\frac{1}{6}\left(\Delta t^2\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}+u\Delta x^2\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)$$
$$+O(\Delta t^3,\Delta x^2). \tag{29}$$

由（29）可以看出

$$\frac{\partial u}{\partial t}=-u\frac{\partial u}{\partial x}+O(\Delta t,\Delta x^2). \tag{30}$$

(30) 式对 t 进行微分，可得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=2u\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+u^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+O(\Delta t,\Delta x^2), \tag{31}$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}=-6u\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^3-9u^2\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-u^3\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}+O(\Delta t,\Delta x^2). \tag{32}$$

将（31）、（32）代入（29）式便得到格式 4 的修正微分方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}=-\Delta t u\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\Delta t^2 u\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^3+\frac{3}{2}\Delta t^2 u^2\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$
$$+\frac{1}{6}(\Delta t^2 u^3-\Delta x^2 u)\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}+O(\Delta t^2,\Delta t\Delta x^2). \tag{33}$$

同样地，可求出格式 3 的修正微分方程：

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}=-\Delta t u\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\Delta t^2 u\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^3+\frac{1}{2}\left(3\Delta t^2 u^2\frac{\partial u}{\partial x}-\Delta t u^2+\Delta x u\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$
$$+\frac{1}{6}(\Delta t^2 u^3-\Delta x^2 u)\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}+O(\Delta t^2,\Delta t\Delta x). \tag{34}$$

于是，格式 3 的二阶耗散系数为

$$\mu_2=\frac{1}{2}\left(3\Delta t^2 u^2\frac{\partial u}{\partial x}-\Delta t u^2+\Delta x u\right). \tag{35}$$

格式 4 的二阶耗散系数为

$$\mu_2=\frac{3}{2}\Delta t^2 u^2\frac{\partial u}{\partial x}. \tag{36}$$

只有当二阶耗散系数μ_2为正时，格式 3、4 才是计算稳定的。当然，这就要求μ_2在$t=0$时为正。于是，有以下定理：

定理 2 一维非线性平流方程差分格式 3（FTBS 格式）计算稳定的必要条件为

$$3\Delta t^2 u^2(x,0)\frac{\partial u(x,0)}{\partial x}-\Delta t u^2(x,0)+\Delta x u(x,0)>0. \tag{37}$$

定理 3 一维非线性平流方程差分格式 4（Lax–Wendroff 格式）计算稳定的必要条件为

$$\frac{\partial u(x,0)}{\partial x}>0. \tag{38}$$

通过以上分析可得如下推论：

推论 1 一维线性平流方程差分格式的计算稳定性只与差分格式的结构有关，与初值的形式无关。

推论 2 一维非线性平流方程差分格式的计算稳定性不仅取决于差分格式的结构，还取决于初值及其偏导数的形式。

4 数值试验

为进一步对一维线性、非线性平流方程差分格式的计算稳定性与格式结构和初值的

关系进行比较分析，我们做如下数值试验。

取如下两个初值：

$$u(x,0)=x,\quad u(x,0)=-x,\qquad 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant t\leqslant 10.$$

取$\Delta x=0.01$，$\Delta t=0.001$，$U=1$，计算结果如表 1。

表 1　数值试验计算结果

	格式 1	格式 2	格式 3	格式 4
初值 1	稳定	稳定	稳定	稳定
初值 2	稳定	稳定	不稳定	不稳定

由计算结果可以看出，格式 1、2 由于满足定理 1，所以对初值 1、2 均计算稳定。格式 3、4 对初值 1 分别满足定理 2、3 所给定的条件，是计算稳定的；对初值 2 不满足定理 2、3 所给定的条件，因此计算不稳定（图 1、2）。

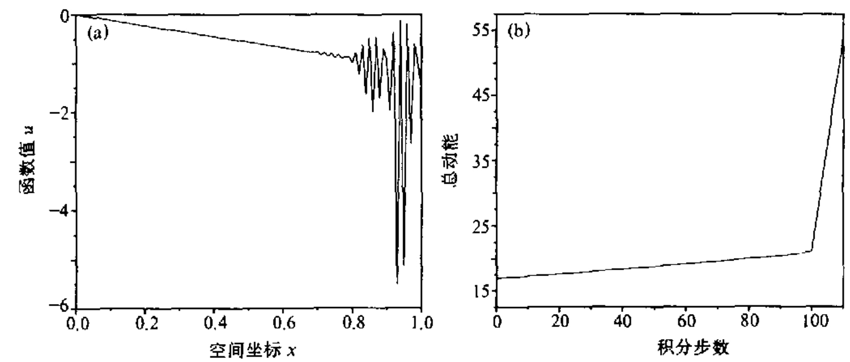

图 1　格式 3 对初值 2 的计算结果
(a) 函数值变化曲线；(b) 总动能变化曲线

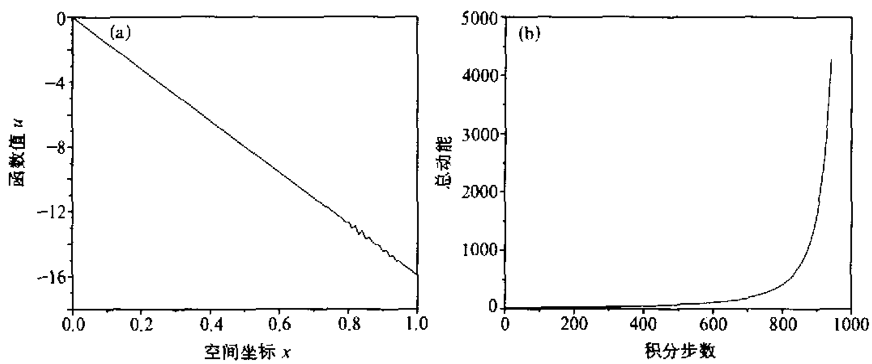

图 2　格式 4 对初值 2 的计算结果
(a) 函数值变化曲线；(b) 总动能变化曲线

5 结果与讨论

通过对线性、非线性发展方程差分格式计算稳定性的比较分析和数值试验，证实了非线性发展方程差分格式的计算稳定性与线性发展方程差分格式的计算稳定性是完全不同的。非线性发展方程差分格式的计算稳定性必须把差分格式的结构同初值及其偏导数形式结合起来分析才有意义。

参 考 文 献

1 Von Neumann, J. and R. D. Richtmyer, A method for the numerical calculation of hydrodynamical shocks, *J. Appl. Phys.*, 1950, **21**, 232～257.

2 Hirt, C. W., Heuristic stability theory for finite–difference equations, *J. Comp. Phys.*, 1968, **2**, 339～355.

3 曾庆存，计算稳定的若干问题，大气科学，1978，2(3)，181～191.

4 曾庆存、季仲贞，发展方程的计算稳定性问题，计算数学，1981，3(1)，79～86.

5 季仲贞，非线性计算稳定性的比较分析，大气科学，1981，4(4)，344～354.

6 季仲贞、王斌，再论发展方程差分格式的构造和应用，大气科学，1991，15(2)，72～78.

7 Warming, R. F. and B. J. Hyett, The modified equation approach to the stability and accuracy analysis of finite–difference methods, *J. Comp. Phys.*, 1974, **14**, 159～179.

A Comparative Analysis of the Computational Stability for the Difference Schemes of Linear and Non–Linear Evolution Equations

Lin Wantao and Ji Zhongzhen

(*State Key Laboratory of Numerical Modeling for Atmospheric Science and Geophysical Fluid Dynamics, Institute of Atmospheric Physics, Chinese Academy of Science, Beijing* 100029)

Yang Xiaozhong

(*North China Electric Power University, Beijing* 102206)

Abstract For several difference schemes of linear and non–linear evolution equations, taking one–dimensional linear and non–linear advection equation as examples, a comparative analysis for computational stability is carried out. It is discussed for the relationship between non–linear computational stability, the construction of difference scheme and the form of initial value.

Key words: evolution equation; difference scheme; computational stability; initial value