

三维指数型迎风格式以及在环境数值 模拟中的初步应用^{*}

吴持平^{1,3)} 张永兴²⁾ 季仲贞¹⁾
孙文心⁴⁾ 郭泽德³⁾ 金卫平⁵⁾

1) (中国科学院大气物理所大气科学和流体力学数值模拟国家重点实验室, 北京 100029)

2) (中国原子能技术研究院, 北京 102413) 3) (中国辐射防护研究院, 太原 030006)

4) (青岛海洋大学, 青岛 266003)

5) (太原热力设计研究院, 太原 030012)

摘 要 为了适应大气、海洋的环境数值模拟需要, 在前人工作基础上提出了三维随流格式和指数型迎风格式。随流格式能使方程对流项中的对流速度误差明显减小。三维指数型迎风格式能有效抑制对流占优问题的数值振荡, 并用简单的七点差分格式获得 $O(h^2)$ 精度的三维模式数值结果。因此, 所建的模式具有格式简单, 计算稳定性良好和计算精度较高的优点。初步计算表明, 这个模式能有效应用于强迫—耗散型大气、海洋运动和环境问题的数值模拟。

关键词: 环境数值模拟; 三维随流格式; 三维指数型迎风格式

1 引言

数值天气预报、海洋数值模拟和大气、海洋的环境污染数值模拟均为典型的计算地球流体力学问题。平均扰动运动方程是计算大气、海洋流场的基本方程之一。对于该方程对流项中的流速散度项的差分格式构造, 已有许多优秀的研究成果。例如, 紧致格式、迎风紧致格式等^[1,2]。对于对流项中的对流速度的研究, 蒋锦良^[3]在研究对流占优型一维 Burgers 方程时, 提出了随流格式, 讨论了对流速度的传统取法所引起的误差使对流项计算精度下降的事实。并指出人们花费很大精力计算出的流速散度项高精度差分格式, 会由于对流速度误差而使整个对流项差分格式的精度大幅度下降。这一问题在三维平均扰动运动方程的数值模拟中, 显然也有必要解决。另外, 对于环境数值模拟中的三维对流占优问题, 要建立计算精度高且有良好的计算稳定性和简单数学表示的差分格式也是目前仍未很好解决的问题。杨志峰等^[4]在一维对流—扩散问题中建立了指数自动迎风格式, 本文将这一研究成果推广到三维平均扰动运动方程的求解, 在建立了三维指数型迎风格式后, 用所建新模式对渤海的四大分潮进行了模拟计算。计算结果表明以上两个差分格式综合应用所建立的模式, 具有良好的计算稳定性和 $O(h^2)$ 精度, 同时具有最

2000-12-21 收到, 2001-09-12 收到修改稿

^{*} 国家重点基础研究发展规划项目G1999032801、国家自然科学基金资助项目49975020及大气科学和地球流体力学数值模拟国家重点实验室开放课题项目共同资助

简单的 7 点格式, 故较好地解决了用简单数学形式建立计算稳定性好且精度较高的有效模式问题。

2 三维随流格式

引进文献[3]一维随流格式的推导思路, 并以直角坐标系为例进行讨论。设流速矢量 V 在 x, y, z 方向的分量 u, v, w 在 Δt 时间内从 i 点运动到 N 点。其 N 点坐标 $N(x_N, y_N, z_N)$ 可以由以下公式近似表示:

$$\begin{cases} x_N = x_i - u_N \Delta t, \\ y_N = y_i - v_N \Delta t, \\ z_N = z_i - w_N \Delta t. \end{cases} \quad (1)$$

将 u_N, v_N, w_N 分别作关于节点 i 的级数展开, 并将 (1) 式代入展开式得到 N 点的速度级数展开形式。我们仅用 u_N 分量为例进行推导, 其级数展开形式为

$$u_N = u_i + (x_N - x_i) \left[\frac{\Delta u}{\Delta x} \right]_i^n = u_i - u_N \Delta t \left[\frac{\Delta u}{\Delta x} \right]_i^n, \quad (2)$$

整理得到

$$u_N = \frac{u_i^n}{1 + \Delta t \left[\frac{\Delta u}{\Delta x} \right]_i^n}, \quad (3)$$

其中, u_i^n 是 t_n 时刻节点 i 处的 u 速度, $[\Delta u / \Delta t]_i^n$ 为 t_n 时刻节点 i 处导数 $\partial u / \partial x$ 的某种差分近似式。

同理 v_N, w_N 也可以用类似的方法导出, v_N 和 w_N 的表示式为

$$v_N = \frac{v_i^n}{1 + \Delta t \left[\frac{\Delta v}{\Delta y} \right]_i^n}, \quad (4)$$

$$w_N = \frac{w_i^n}{1 + \Delta t \left[\frac{\Delta w}{\Delta z} \right]_i^n}. \quad (5)$$

在文献[3]中蒋锦良作了关于一维随流格式的误差分析。对于一维对流方程, 随流格式计算结果与精确解完全相同; 对于一维 Burgers 方程, 随流格式与迎风格式、中心差分格式、Lax-Wandroff 格式进行比较, 其相对误差为

$$R = \frac{\sum_i |u_{ic} - u_{ir}|}{\sum_i |u_{ir}|}, \quad (6)$$

其中, u_{ic} 表示计算值, u_{ir} 表示精确值。由上结果可知, 随流格式精度至少比上述其他格式提高了一个数量级。可见在不改变对流项偏导差分格式精度的前提下, 随流格式能明显提高计算精度。(当然这要在偏导数的计算精度也与流速项相当的前提下才可能得出此结论)。

这时在 f 坐标系或 β 坐标系和“薄层流”假设条件下, 用随流格式表示的三维正压大气海洋运动的平均扰动运动方程为

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \mathbf{V}_N \cdot \nabla u - fv = -g \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \nabla \cdot (k \nabla u), \quad (7)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \mathbf{V}_N \cdot \nabla v - fu = -g \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \nabla \cdot (k \nabla v), \quad (8)$$

其中, Φ 为势函数, 在海洋运动中 Φ 可以表示为自由水面的水位; k 为湍粘性系数; $\mathbf{V}_N$ 为随流格式表示的流速。

$$\mathbf{V}_N = u_N \mathbf{i} + v_N \mathbf{j} + w_N \mathbf{k}, \quad (9)$$

式中 u_N , v_N , w_N 分别满足 (3) ~ (5) 式。

3 三维指数型迎风格式

引进文献[4]的建模思路并将其进一步发展成求解三维问题, 这时令

$$V_L = (u, v) = (\theta_1, \theta_2) \psi(x, y, z) \varphi(t), \quad (10)$$

式中, $\theta_i = \theta_i(x, y, z, t)$ ($i = 1, 2$); φ 和 ψ 均为 $O(1)$ 阶无因次变量。

下面以 (7) 式为例, 推导三维指数型迎风格式。将 (10) 式代入 (7) 式, 得到

$$\begin{aligned} & \psi \left(\varphi \frac{\partial \theta_1}{\partial t} + \frac{d\varphi}{dt} \theta_1 \right) + u_N \varphi \left(\psi \frac{\partial \theta_1}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \theta_1 \right) \\ & + v_N \varphi \left(\psi \frac{\partial \theta_1}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \theta_1 \right) + w_N \varphi \left(\frac{\partial \theta_1}{\partial z} + \theta_1 \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) \\ & = k_L \varphi \left(\frac{\partial^2 \theta_1}{\partial x^2} \psi + 2 \frac{\partial \theta_1}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right) + k_L \varphi \left(\frac{\partial^2 \theta_1}{\partial y^2} \psi + 2 \frac{\partial \theta_1}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \theta_1 \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) \\ & + k_D \varphi \left(\frac{\partial^2 \theta_1}{\partial z^2} \psi + 2 \frac{\partial \theta_1}{\partial z} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \theta_1 \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right) - I_1, \end{aligned} \quad (11)$$

其中

$$I_1 = g \frac{\partial \Phi}{\partial x} + fv, \quad (12)$$

k_L 和 k_D 分别为水平和垂直方向的湍粘性系数。

为了消去 (11) 式中的对流项, 令 (10) 式中的 φ 和 ψ 满足

$$\psi = \frac{2k_L}{u_N} \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{2k_L}{v_N} \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{2k_D}{w_N} \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad (13)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} \psi + \varphi \left(u_N \frac{\partial \psi}{\partial x} + v_N \frac{\partial \psi}{\partial y} + w_N \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) = \varphi \left(k_L \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + k_L \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + k_L \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right), \quad (14)$$

采用分离变量法求解 (13) 式, 即令

$$\psi(x, y, z) = T_a(x) T_b(y) T_c(z), \quad (15)$$

将 (15) 式代入 (13) 式, 通过简单推导可以得到如下 ψ 的表示:

$$\psi = \exp\left(\int \frac{u_N}{2k_L} dx + \int \frac{v_N}{2k_L} dy + \int \frac{w_N}{2k_D} dz + c_0\right), \quad (16)$$

其中 c_0 为积分常数。

u_N , v_N , w_N 和 k_L , k_D 是连续变化的, 这将对求解 (16) 式带来不便。为了解决这一问题, 当研究区 G 进行数值模式计算时, 要进行网格离散。其节点 i 的子域 $G_i \in \left[\left(i - \frac{1}{2}\right)\Delta x, \left(i + \frac{1}{2}\right)\Delta x\right] \times \left[\left(j - \frac{1}{2}\right)\Delta y, \left(j + \frac{1}{2}\right)\Delta y\right] \times \left[\left(l - \frac{1}{2}\right)\Delta z, \left(l + \frac{1}{2}\right)\Delta z\right]$ 内, 上述变量和参量均用分片常量近似。这时子区域 G_i 上的 ψ_i 可表示为

$$\psi_i = \exp\left[\frac{u_{Ni}}{2k_{Li}}(x - x_i) + \frac{v_{Ni}}{2k_{Li}}(y - y_i) + \frac{w_{Ni}}{2k_{Di}}(z - z_i)\right], \quad (17)$$

其中 u_{Ni} , v_{Ni} , w_{Ni} 和 k_{Li} , k_{Di} 为 G_i 子域中的分片常量近似值, 而 ψ 和 ψ_i 的关系为

$$\psi = \sum_{i=1}^N \psi_i \alpha_i, \quad \alpha_i = \begin{cases} 1, & i \in G_i \\ 0, & i \notin G_i \end{cases} \quad (18)$$

其中 N_i 为区域节点总数。

将 (13)、(16) 式代入 (14) 式, 并做简单的求解运算得到:

$$\varphi(t) = \exp\left\{\frac{1}{2} \int \left[\left(\frac{\partial u_N}{\partial x} - \frac{u_N^2}{2k_L} \right) + \left(\frac{\partial v_N}{\partial y} - \frac{v_N^2}{2k_L} \right) + \left(\frac{\partial w_N}{\partial z} - \frac{w_N^2}{2k_D} \right) \right] dt\right\}, \quad (19)$$

由于前面假设子域 G_i 内 u_N , v_N , w_N 为分片常量, 故 $\frac{\partial u_N}{\partial x}$, $\frac{\partial v_N}{\partial y}$, $\frac{\partial w_N}{\partial z}$ 均为零, 即

(19) 式可简化为

$$\varphi_i(t) = \exp[-a(t - t_N)] = \exp(-a\tau), \quad (20)$$

$$a = \frac{1}{4} \left(\frac{u_N^2}{k_L} + \frac{v_N^2}{k_L} + \frac{w_N^2}{k_D} \right), \quad (21)$$

$$\varphi = \sum_{i=1}^N \varphi_i \alpha_i. \quad (22)$$

由以上讨论可知, 当 ψ 和 φ 变量满足 (13)、(14) 式时, (11) 式可以简化为如下不显含对流项的形式:

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial t} = k_L \Delta_L \theta_1 + k_D \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial z^2} - J_1, \quad (23)$$

其中

$$J_1 = I_1 \varphi^{-1} \psi^{-1}, \quad (24)$$

$$\Delta_L \theta_1 = \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial y^2}. \quad (25)$$

下面讨论 (23) 式的自动迎风性质。将 (10) 式代入 (23) 式, 可以得到如下用 u 表示 (23) 式的数学式:

$$\psi^{-1} \frac{\partial u \varphi^{-1}}{\partial t} = \varphi^{-1} k_L \Delta_L (\varphi^{-1} u) + k_D \varphi^{-1} \frac{\partial^2 (u \psi^{-1})}{\partial z^2} - J_1, \quad (26)$$

对 (25) 式用差分格式近似, 得到其离散式为

$$\begin{aligned} \frac{u_{i,j,l}^{n+1} e^{a\tau} - u_{i,j,l}^n}{\tau} = & \frac{k_L}{4\Delta x^2} (e^{-b_1} u_{i+\frac{1}{2},j,l} + e^{b_1} u_{i-\frac{1}{2},j,l} - 2u_{i,j,l}) \\ & + \frac{k_L}{4\Delta y^2} (e^{-b_2} u_{i,j+\frac{1}{2},l} + e^{b_2} u_{i,j-\frac{1}{2},l} - 2u_{i,j,l}) \\ & + \frac{k_D}{4\Delta z^2} (e^{-b_3} u_{i,j,l+\frac{1}{2}} + e^{b_3} u_{i,j,l-\frac{1}{2}} - 2u_{i,j,l}) - J_1. \end{aligned} \quad (27)$$

其中

$$b_1 = \frac{u_N}{4k_L}; \quad b_2 = \frac{v_N}{4k_L}; \quad b_3 = \frac{w_N}{4k_D}. \quad (28)$$

由 (26) 式可知, 当 $u_N > 0$ 时, 上游的 $\psi_{i-\frac{1}{2},j,l}^{-1}$ 值恒大于下游的 $\psi_{i+\frac{1}{2},j,l}^{-1}$ 值。反之, 当 $u_N < 0$ 时, 上游的 $\psi_{i+\frac{1}{2},j,l}^{-1}$ 恒大于下游的 $\psi_{i-\frac{1}{2},j,l}^{-1}$ 。当 $u_N = 0$ 时, $\psi_{i+\frac{1}{2},j,l}^{-1} = \psi_{i-\frac{1}{2},j,l}^{-1} = 1$ 。同理对于 v_N 和 w_N , 函数 ψ^{-1} 也有同样的迎风性质。故称 ψ 为迎风函数。用类似的讨论可以看出, 在 (27) 式中 $\varphi^{-1}(t_{n+1}) = e^{a\tau}$; $\varphi^{-1}(t_n) = 1$, 即 $\varphi^{-1}(t_{n+1})$ 恒大于 $\varphi^{-1}(t_n)$, 体现了 $\varphi^{-1}(t)$ 的时间历经效应, 故称 $\varphi(t)$ 为历经函数。

总之, ψ 的“迎风效应”和 φ 的“历经效应”很好反映地了实际流场的运动状态, 故本文称 (23) 式或 (25) 式为三维指数型自动迎风格式。该式不必像一般迎风格式那样要进行流速方向的判别, 而是根据对流项随流格式的流速 V_N 自动形成迎风特征, 因此使计算得以简化。其次我们可以看出 (23) 式具有最简单的差分形式 (对于三维问题而言仅为 7 点格式), 能用简单的表示式有效克服对流占优问题的数值振荡, 这是三维指数型迎风格式优于有限分析法^[5]的一个特点。第三, 本格式是 $O(h^2)$ 精度, 因此达到了在一个格式中同时克服数值耗散和数值振荡的目标。

用类似的推导还可以给出 (8) 式的指数型迎风格式:

$$\frac{\partial \theta_2}{\partial t} = k_L \Delta_L \theta_2 + k_D \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial z^2} - J_2, \quad (29)$$

其中

$$J_2 = \left(g \frac{\partial \Phi}{\partial y} - fu \right) \varphi^{-1} \psi^{-1}. \quad (30)$$

4 模式的计算实例

用本文的模式我们计算了渤海的 4 大分潮。渤海海域 M_2 、 S_2 、 K_1 、 O_1 4 个分潮的实测资料取自文献[6]。由于篇幅所限本文仅给出其中的 M_2 和 K_1 分潮。用本文建立的模式所计算出来的 M_2 、 K_1 分潮的同潮时一等潮差图见图 1, 对应的表层潮流速椭圆图见图 2。从计算值和实测值的流场及潮水位场的比较可知, 本文所建的三维流模式的模拟计算是令人满意的, 初步计算表明本文的模式可以较好地应用于强迫耗散型大气、海洋运动和污染物输运问题的数值模拟。

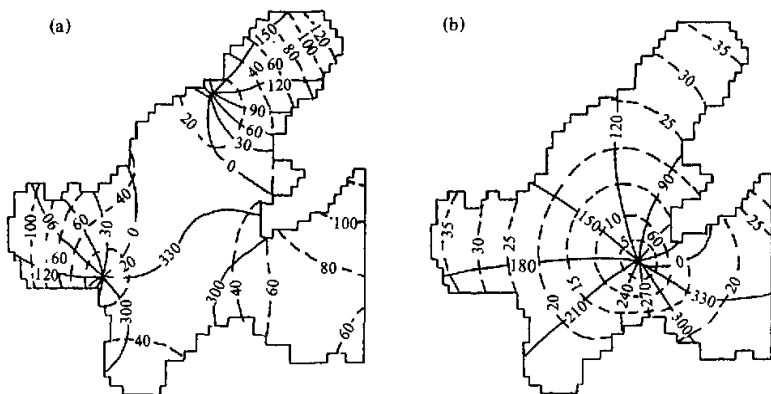


图1 模式计算出来的 M_2 (a) 和 K_1 (b) 分潮的同潮时一等潮差图

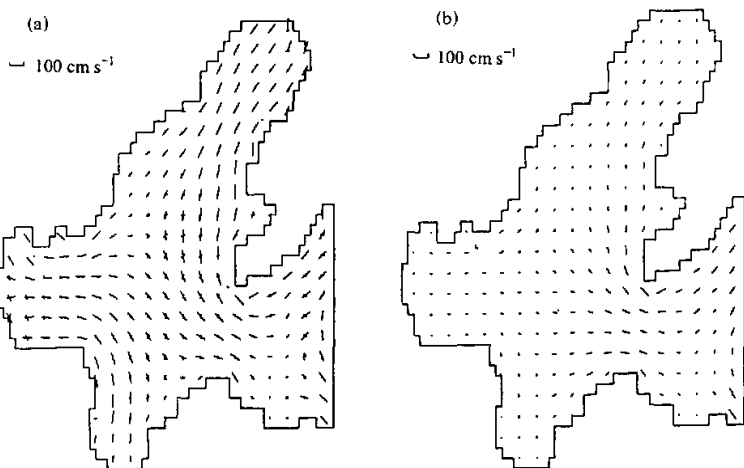


图2 模式计算出来的 M_2 (a) 和 K_1 (b) 分潮表层潮流速椭圆图

5 结论

对于强迫—耗散大气、海洋运动和环境污染物输运问题, 特别是其中的对流占优问题, 一般在建立模式时, 会遇到要用一个模式同时克服数值耗散和振荡的难题。而且若要用简单的差分格式满足这一目标就更为困难。本文建立的模式具有以下特点:

(1) 在前人工作基础上建立了对流项中对流速度项的三维随流格式。当对流项流速的空间导数项已有高质量的差分格式去近似时, 随流格式可以使对流速度具有其导数项相匹配的精度, 因此能使整个对流项的计算精度提高, 这对于对流占优问题是有实际意义的。

(2) 本文建立的三维指数型迎风格式能用简单的差分格式 (对于三维是最简单的 7

点格式) 在 $O(h^2)$ 精度的前提下克服数值振荡, 从而达到了用简单数学式的同时有效克服了数值耗散和数值振荡的目标。

(3) 本文的模式还可以用于建立三维大气、海洋环境问题物质输运对流—扩散方程的模式, 特别适用于其中的对流占优型的问题数值模拟。

通过渤海的 4 大分潮计算结果可以看出, 所建立的三维流模式计算是令人满意的。这为建立三维强迫—耗散型大气、海洋的运动和大气、海洋环境问题的物质输运模式奠定了坚实的基础。由于三维平均扰动运动方程的解析解验证模式较难找到, 因此本文还未与解析解结果进行对比计算, 这一工作需要在今后的工作中进一步完成。

参 考 文 献

- 1 马延文、傅德薰, 计算空气动力学一个新的激波捕捉法——耗散比拟法, 中国科学 (A 辑), 1992, 22, 263~271.
- 2 刘宏、傅德薰、马延文, 迎风紧致格式与驱动方腔流动问题的直接数值模拟, 中国科学 (A 辑), 1993, 23, 657~665.
- 3 蒋锦良, 求解对流占优 Burgers 方程的随流格式, 计算物理, 1992, 9, 127~132.
- 4 杨志峰、陈国谦, 含源汇非定常对流扩散问题紧致四阶差分格式, 科学通报, 1993, 38, 113~116.
- 5 陈景仁 (美), 湍流模型及有限分析法, 上海: 上海交通大学出版社, 1989.
- 6 中国科学院海洋研究所, 渤海、黄海、东海海洋图集, 北京: 海洋出版社, 1992.

A 3-D Exponential Up-wind Scheme and Its Preliminary Application in Environment Numerical Simulations

Wu Chiping^{1,3)}, Zhang Yongxing²⁾, Ji Zhongzhen¹⁾,
Sun Wenxing⁴⁾, Guo Zede³⁾, and Jin Weiping⁵⁾

1) (State Key Laboratory of Numerical Modeling for Atmospheric Sciences and Geophysical Fluid Dynamics, Institute of Atmospheric Physics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100029)

2) (China Institute of Atomic Energy, Beijing 102413)

3) (China Institute for Radiation Protection, Taiyuan 030006)

4) (Ocean University of Qingdao, Qingdao 266003)

5) (Heating Power Designing Institute of Taiyuan, Taiyuan 030012)

Abstract In order to satisfy the requirement of environmental numerical simulations in atmosphere, ocean, both a 3-D with-flow scheme and a 3-D exponential up-wind scheme, based on the researchs of, are proposed in this paper. Using the with-flow scheme it is possible to obviously decrease the velocity's error of the convection term in the equation. Only using simple seven points difference scheme, the 3-D exponential up-wind scheme can give results of precision under the condition it can efficiently restrains the numerical oscillation in problem that convection occupies superiority. Therefore, the model in the paper has advantages of the simple scheme, good computive stability and higher precision. Preliminary computing shown that it can efficiently use in numerical simulation on forcing-and-dissipating atmospheric, oceanic motion and environment problems.

Key words: environment numerical simulation; 3-D with-flow scheme; 3-D exponential up-wind scheme