

非饱和土壤水流方程的极值原理*

谢正辉¹⁾ 简怀玉²⁾ 曾庆存¹⁾

1) (中国科学院大气物理研究所, 北京 100029)

2) (清华大学应用数学系, 北京 100084)

摘要 讨论了非饱和土壤水流问题及其数值计算方案的极值原理, 在理论上证明了连续问题及其数值格式均满足极值原理, 即在一定的条件下, 预报变量的最大值和最小值只能在边界上达到, 从而描述了特定的物理性质。这些问题在讨论入渗、蒸发问题的研究中是重要的。

关键词: 非饱和流; 离散; 极值原理

1 引言

非饱和和土壤水的流动是土壤水未完全充满孔隙时的流动, 是多孔介质流体运动的一种重要形式^[1]。非饱和流动的预报在大气科学、土壤学、农业工程、环境工程和地下水动力学等方面具有重要意义。土壤含水量作为一个重要的气候因子, 其季节变动对中高纬地区的天气与气候具有重要的影响^[2~4]。把土壤含水量计算进行重点描述的陆面参数化研究, 已是大气科学的热门课题^[5,6]。地表和地下的水文过程, 如大气降水、蒸发和植物的蒸腾, 地面水的渗漏和深层水的上吸, 根系的吸收和地下水流等, 都归结为非饱和流动^[1,4,7,8]。

基于大气环流模式的水平分辨率 (1~5 个经纬度), 土壤水分在水平方向上的流动可以忽略。我们考虑一维非饱和流问题, 水头值有不同的时空分布。设 $h(z, t)$ 为在 t 时刻距离地面为 z 的地下面的水头值, z 轴垂直向下, z 轴坐标原点取为地面。假设地面有随时间变化的入渗或蒸发率, 入渗为正, 蒸发为负。假设 L 是地面到岩床深度, 并设 $z = (0, L)$ 。假设在底部水头值或含水率有随时间而变化的分布 $\beta(t)$, 但随时间的变化很小, 可以忽略。根据 Darcy 定律及连续性原理, 可得如上所述的非饱和流 Richard 方程

$$C(h) \frac{\partial h}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial z} \left[K(h) \frac{\partial h}{\partial z} \right] + \frac{\partial K(h)}{\partial z} = S_r, \quad (1)$$

$$h(z, 0) = h_0(z), \quad z \in \Omega \quad (2)$$

$$h(L, t) = \beta(t), \quad t > 0 \quad (3)$$

$$K(h) - K(h) \frac{\partial h}{\partial z} = q(t), \quad \text{当 } z = 0, t > 0 \text{ 时} \quad (4)$$

2002-05-22 收到, 2002-07-11 收到修改稿

* 国家自然科学基金资助项目 40275023、40145020 和国家重点基础研究发展规划项目 G1998040905、2001CB309404 以及中国科学院百人计划项目联合资助

这里 $C(h) = \partial\theta/\partial h > 0$ 是比容系数, $\theta (0 < \theta < 1)$ 是含水率, 负压水头 $h(z, t) \leq 0$, z 是正向向下的垂直坐标, $K(h)$ 是有效水力传导系数, $-S_r$ 是根系吸水率, (参见文献 [1, 4, 7~11]), $d\beta/dt \approx 0$. 方程 (2)、(3)、(4) 分别是初始条件、下边界条件和上边界条件, 当地表通量 $q(t) > 0$ 时, 上边界条件方程 (4) 相当于地表通量已知^[2,3], 即认为表面供水强度 (降雨或喷灌) 已知, 但未超过土壤入渗强度, 不形成积水或表面径流. 但如果经过一定时间后地表面通量超过入渗能力, 此时假定形成径流泄走, 不形成缺水, 这种情况边界条件方程 (4) 应换为

$$\begin{cases} K(h) - K(h) \frac{\partial h}{\partial z} = q(t), & \text{当 } z = 0, t_a > t > 0 \text{ 时} \\ h(0, t) = 0, & \text{当 } t \geq t_a \text{ 时} \end{cases} \quad (5)$$

这里假定 $h_0(z) \leq 0$, $h(z, t) = 0$ 对应于饱和含水率, 而 t_a 为 $h(0, t) = 0$ 的起始时间. 注意这里的 t_a 与 h 有关, 从而这种边界条件的交替时刻也是预报变量.

当 $q(t) \leq 0$ 时, 上边界条件方程 (4) 相当于土壤以某一蒸发率蒸发. 如果经历一定时间后, 地表面达到风干含水率, 此时 $h = h_d$ 为达到风干含水率时的水头值, 这种情形的上边界条件方程 (4) 应换为

$$\begin{cases} K(h) - K(h) \frac{\partial h}{\partial z} = q(t), & \text{当 } z = 0, t_a > t > 0 \text{ 时} \\ h(0, t) = h_d, & \text{当 } t \geq t_a \text{ 时} \end{cases} \quad (6)$$

这里假设 $h_0(z) \geq h_d$, 而 t_a 为 $h(0, t) = h_d$ 的起始时间.

对于入渗问题, 当初始时刻的含水率在上边界最大, 下边界最小, 那么当入渗强度比上边界当时的土壤传导率大时, 入渗一段时间后土壤含水率仍然在上边界达到最大, 下边界达到最小. 对于蒸发问题, 当初始时刻的含水率在上边界最小, 下边界最大, 那么蒸发一段时间后的土壤含水率仍然在上边界达到最小, 下边界达到最大. 诸如这样的物理性质, 数学模型包括连续问题和离散格式是否满足, 是我们极为关注的问题.

文献 [2, 3] 对非饱和流问题方程 (1)~(4) (或 (5) 或 (6)) 进行了数值模拟, 用有限元集中质量法较好地模拟了非饱和流问题. 模拟结果表明, 离散格式满足极值原理, 即在一定的条件下预报变量的最大、最小值只能在边界上达到. 本文讨论了文献 [2, 3] 所研究的非饱和流问题及其数值模型的极值原理, 从理论上证明了所观察到的一些结果和现象, 表明数学模型与实际问题的物理性质是相符合的.

2 极值原理

从数学的角度来看可以对定解问题方程 (1)~(4) 中的已知数据作以下假设:

(A₁) $\beta(t)$ 和 $q(t)$ 为 $(0, \infty)$ 上的光滑函数, $h_0(z)$ 为 $[0, L]$ 上的光滑函数;

(A₂) $C(f)$ 和 $K(f)$ 为 R 上的光滑正值有界函数;

(A₃) $S_r = S_r(z, t, f)$ 为 $[0, L] \times [0, \infty) \times R$ 上的光滑有界函数.

在上述假设之下, 并设初始条件和边界条件在 $(z, t) = (0, 0), (L, 0)$ 处满足通常的相容性条件, 则可以证明方程 (1)~(4) 存在唯一的整体光滑解. 由于这一结论的证明

涉及到现代偏微分方程中专门理论, 需要很长的篇幅, 我们将在另文中加以论述。本文感兴趣的是研究方程(1)~(4)光滑解及离散解的性质。

本文假设 $(A_1) \sim (A_3)$ 成立, $h(z, t)$ 为方程(1)~(4)在区域 $Q_T = [0, L] \times [0, T]$ 上的光滑解, T 是大于零的任意时刻。由于闭域上的连续函数一定取到最大值和最小值, 所以 h 在 Q_T 上, 或 $h(z, t)$ 在 $[0, L](t \in [0, T])$ 上一定达到最大值和最小值。下面来讨论方程(1)~(4)的性质。有关入渗和蒸发性质的研究表明该模型与物理性质是吻合的。

2.1 连续问题

2.1.1 蒸发情况

根据土壤含水率与负压水头的单调关系, 下面的性质 1 表明, 当上边界处于蒸发状态, 并且初始时刻上边界 $z=0$ 的含水率没有达到饱和, 则时刻 $t(0 < t < T)$, $\theta(z, t)$ 也不在上边界 $z=0$ 饱和。

性质 1 若上边界蒸发, 即 $q(t) \leq 0$, 初始时刻的水头分布 $h_0(z)$ 在 $[0, L]$ 上不在上边界 $z=0$ 处达到最大值, 则 $h(z, t)$ 在 Q_T 上的最大值也不在 $z=0$ 上达到, 并且对任意 $t \in (0, T]$, $h(z, t)$ 在 $[0, L]$ 上的最大值也不在 $z=0$ 处达到。

证 用反证法。若存在 $t_0 \in [0, T]$, 使得 $h(z, t_0)$ 在 $[0, L]$ 上的最大值在 $z=0$ 处达到。那么对任意 $\Delta z \geq 0$, 均有 $h(\Delta z, t_0) \leq h(0, t_0)$, 所以

$$\frac{\partial h}{\partial z} \Big|_{z=0} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{h(\Delta z, t_0) - h(0, t_0)}{\Delta z} \leq 0.$$

又 K 为正值函数, 因此当 $z=0$, $t=t_0$ 时,

$$K(h) - K(h) \frac{\partial h}{\partial z} > 0.$$

另一方面, 据边界条件方程 (4), 当 $z=0$, $t=t_0$ 时,

$$K(h) - K(h) \frac{\partial h}{\partial z} = q(t_0) \leq 0.$$

这样, 就产生矛盾。所以, 对任意 $t \in [0, T]$, $h(z, t)$ 在 $[0, L]$ 上的最大值在 $z=0$ 处不能达到。

现在反设 h 在 Q_T 上的最大值在 $z=0$ 处达到, 设最大值点为 $(0, t_0)$, 由初始值的假设, $t_0 > 0$ 。于是 $h(z, t_0)$ 在 $[0, L]$ 上的最大值在 $z=0$ 处达到。利用前面已证明的结论知道这是不可能的。所以 h 在 Q_T 上的最大值在 $z=0$ 达不到。证毕。

性质 2 若源汇项 $S_i \leq 0$, 则 h 在 Q_T 上的最大值一定在 Q_T 的抛物边界

$$\partial_p Q_T = \{(z, t), z=0, L, 0 < t \leq T\} \cup \{(z, 0), 0 \leq z \leq L\}$$

上达到。

证 设

$$A(z, t) = K(h(z, t))/C(h(z, t)),$$

$$B(z, t) = K(h(z, t)) \left[1 - \frac{\partial h(z, t)}{\partial z} / C(h(z, t)) \right],$$

$$E(z, t) = S_i(z, t, h(z, t))/C(h(z, t)).$$

由于 $h(z, t)$ 为方程(1)~(4)在 Q_T 上的光滑解, 利用假设 $(A_1) \sim (A_3)$ 知: A , B 和 E 都是 Q_T 上的光滑有界函数, 并且 A 在闭域上大于零。因此, 由闭区域上连续函数的最

小值定理,一定存在正常数 α_0 (当然与 h 有关),使得 $A(z, t) \geq \alpha_0 > 0$ 在 Q_T 上每一点都成立。把方程 (1) 两边同时除以 $C(h)$ 可知 h 满足如下标准的线性抛物方程:

$$\frac{\partial h}{\partial t} - A(z, t) \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} + B(z, t) \frac{\partial h}{\partial z} = E(z, t), \quad (7)$$

由于假设 $S_r \leq 0$, 所以 h 满足

$$\frac{\partial h}{\partial t} - A \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} - B \frac{\partial h}{\partial z} \leq 0.$$

现在利用标准的线性抛物方程的极大值原理^[12], 立即得到性质 2 的结论。证毕。

此性质表明含水率分布在 $\partial_p Q_T$ 上达到最大。

性质 3 设上边界蒸发, 即 $q(t) \leq 0$, 且源汇项 $S_r \leq 0$, 并且 h_0 在 $[0, L]$ 上的最大值在 $z=L$ 处达到, 那么 h 在 Q_T 上的最大值也在 $z=L$ 达到。

证 由性质 1 和性质 2 立即可得。

性质 4 若源汇项 $S_r \geq 0$, 则 h 在 Q_T 上的最小值一定在 Q_T 的抛物边界 $\partial_p Q_T$ 上达到。

证 由方程 (7) 和条件 $S_r \geq 0$ 可知 h 满足线性抛物方程不等式

$$\frac{\partial h}{\partial t} - A(z, t) \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} + B(z, t) \geq 0,$$

同样利用极小值原理^[12]。证毕。

性质 5 若上边界蒸发, 即 $q(t) \leq 0$, 源汇项 $S_r = 0$, 初始条件 h_0 在 $[0, L]$ 上的最大值在 $z=L$ 处达到, 最小值在 $z=0$ 处达到 $\beta(t) = h_0(L)$ 为常数, 则 h 在 Q_T 上的最小值必在 $z=0$ 上取得。

证 由初始条件知 h 在 Q_T 中的最大值和最小值在 $Q_T \setminus (0, L) \times \{0\}$ 中达到。于是利用性质 1 和性质 2, h 的最大值一定在 $z=L$ 上达到。若 h 在 Q_T 的最小值也在 $z=L$ 上取得, 由于 $h(L, t) = \beta(t) = h_0(L)$ 为常数。则 h 在 Q_T 上恒为常数, 于是 $\partial h / \partial z = 0$, 这与边界条件方程 (4) 矛盾。所以, 利用性质 4, h 的最小值在 $\{0\} \times [0, T]$ 或者在 $(0, L) \times \{0\}$ 上达到。再由初始值 h_0 在 $[0, L]$ 上的条件, h 的最小值必在 $z=0$ 上达到。证毕。

综合性质 3 和性质 5, 我们得到下面的定理。

定理 1 若上边界蒸发, 即 $q(t) \leq 0$, 源汇项 $S_r = 0$, 初始条件 h_0 在 $[0, L]$ 上最大值在 $z=L$ 处达到, 最小值在 $z=0$ 处达到, $\beta(t) = h_0(L)$ 为常数, 那么对任意 $T > 0$, 方程 (1)~(4) 的解 h 在 Q_T 上的最大值也一定在 $z=L$ 上取到, 最小值在 $z=0$ 上取到。

此定理表明当无源汇时, 在蒸发条件下, 初始时刻的含水率在上边界达到最小, 而在下边界达到最大, 并且下边界条件不随时间变化, 则 $h(z, t)$ 在 Q_T 上的最大值在下边界达到, 而最小值在上边界达到。

下面讨论在任意固定时刻的极大值和极小值的性态。

性质 6 设定理 1 的假设成立, $t_0 \in (0, T)$ 如果 $h(z, t_0)$ 在开区间 $(0, L)$ 中某点取得最大值或最小值, 则 $h(z, t_0)$ 为常数, 即对一切 $z \in (0, L)$ 均有 $h(z, t_0) = h(z_0, t_0)$ 。

证 不妨设 $h(z, t_0)$ 在 (z_0, t_0) 取得最大值, 因为若取得最小值, 下面的讨论是类似的。反设性质 6 不真, 于是存在 $z_1 \in (0, L)$, 使得 $h(z_1, t_0) < h(z_0, t_0)$ 。不妨设 $z_1 < z_0$, 否则当 $z_1 > z_0$ 时, 下面的讨论是类似的。令

$$z_2 = \inf\{z \in (0, L); h(z, t_0) = h(z_0, t_0)\},$$

则 $z_2 > z_1$, 由 $h(z, t_0)$ 的连续性可知, $h(z_2, t_0) = h(z_0, t_0)$, 且当 $z \in (z_1, z_2)$ 时, $h(z, t_0) < h(z_2, t_0)$ 。现在取 $z_3 \in (z_1, z_2)$, 因为 $h(z_3, t_0) < h(z_2, t_0)$, 利用 h 的连续性, 存在 $\delta \in (0, T - t_0)$, 使得当 $t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ 时,

$$h(z_3, t) < h(z_2, t_0) = h(z_0, t_0). \quad (8)$$

对 $\lambda > 0$, 记

$$P_\lambda = \{(z, t) : (z - z_3)^2/\lambda + (t - t_0)^2 < \delta^2\}. \quad (9)$$

注意对任意 $\lambda > 0$, P_λ 总在带形区域 $\{(z, t) : z \in R, t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]\}$ 之中, 并且当 $\lambda \rightarrow 0^+$ 时, $P_\lambda \rightarrow \{z_3\} \times [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$; 而当 λ 增大时, P_λ 可无限变宽。所以, 据 h 的连续性 & (8) 式, 一定存在 $\lambda_0 \in (0, (z_2 - z_3)^2/\delta)$, 使得 h 在 P_{λ_0} 的内部小于 $h(z_0, t_0)$, 而在 P_{λ_0} 的某些边界点上 h 等于 $h(z_0, t_0)$ 。我们不妨设在 P_{λ_0} 的边界上只有一点 $(\bar{z}, \bar{t})$ 使得 $h = h(z_0, t_0)$, 否则, 我们取含于 P_{λ_0} 的一个更小椭圆满足这一性质, 将下面的讨论限制在这个更小的椭圆上即可。这样我们得到了一个形如 (9) 式的椭圆 P_{λ_0} 以及 $(\bar{z}, \bar{t}) \in P_{\lambda_0}$, 使得

$$\begin{cases} P_{\lambda_0} \subset\subset Q_T = [0, L] \times [0, T], \\ h(z, t) < h(z_0, t_0), \text{ 当 } (z, t) \in P_{\lambda_0} \setminus [\bar{z}, \bar{t}], \\ h(\bar{z}, \bar{t}) = h(z_0, t_0). \end{cases} \quad (10)$$

现在将定理 1 的结论、文献 [12] 的第二章引理 2 应用到方程 (1), 立即得到 $\bar{z} = z_3$, 从而 (10) 式导出 $h(z_3, t) = h(z_0, t_0)$ 。另一方面, 由 (8) 式知, $h(z_3, t) < h(z_0, t_0)$ 。因此产生矛盾。故性质 6 正确。证毕。

定理 2 设定理 1 的假设成立, h 为方程 (1)~(4) 在 Q_T 中的解, 则对任意 $t_0 \in (0, T)$, $h(z, t_0)$ 在闭区间 $[0, L]$ 上的最大值在 $z=L$ 处达到, 最小值在 $z=0$ 处达到。

证 反设定理 2 的结论不真, 则存在 $t_0 \in (0, T)$, 使得 $h(z, t_0)$ 的最大值不在 $z=L$ 处取得, 最小值不在 $z=0$ 处取得。令 $\bar{t}$ 表示这样 t_0 的最小值, 由初值假设 $t_0 > 0$, 并由 h 的连续性和 $\bar{t}$ 的最小性, $h(z, \bar{t})$ 的最大值和最小值只在开区间 $(0, L)$ 上达到, 于是由性质 6, $h(z, \bar{t})$ 在 $[0, L]$ 上为常数, 特别是 $\partial h(0, \bar{t})/\partial z = 0$, 代入边界条件 (4) 并利用 (A_2) 得: 当 $z=0, t=\bar{t}$ 时,

$$K(h) - K(h) \frac{\partial h}{\partial z} = K(h) > 0.$$

这与 $q(t) \leq 0$ 矛盾。定理 2 正确。证毕。

2.1.2 入渗情况

这种情况的论述与前一节类似。为简单记, 我们只讨论入渗强度较大的情况, 即假定

$$q(t) > \sup_{z \in R} K(z), \quad \forall t > 0 \quad (11)$$

如果 $h(z, t)$ 在 Q_T 的最小值在某点 $(0, t_0)$ 达到, $t_0 > 0$, 则

$$\frac{\partial h}{\partial z} \Big|_{z=0} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{h(\Delta z, t_0) - h(0, t_0)}{\Delta z} \geq 0.$$

于是边界条件方程 (4) 变为, 当 $z=0, t=t_0$ 时,

$$K(h) = q(t) + K(h) \frac{\partial h}{\partial z} \geq q(t),$$

这与(9)式矛盾。所以我们得到下面的性质7。

性质7 设初始值 h_0 在 $[0, L]$ 上的最小值不在 $z=0$ 处达到, 在假设(11)式下, 方程(1)~(4)的解 h 在 Q_T 上的最小值也不在 $z=0$ 上取到。这表明当入渗强度大于饱和水传导率, 且初始时刻的最小含水率不在上边界达到, 则在 Q_T 上的最小含水率也不在上边界达到。

性质8 设(11)式成立, 源汇项 $S_i \geq 0$, 并设 $h_0(z)$ 在 $[0, L]$ 上的最小值只在 $z=L$ 处取得, 则 h 在 Q_T 上的最小值也在 $z=L$ 上取到。它表明当入渗强度大于饱和水传导率, 且初始时刻的最小含水率在下边界达到, 则在 Q_T 上的最小含水率也在下边界达到。

证 由性质4知 h 的最小值在 $\partial_P Q_T$ 上达到, 但利用性质7, 这个最小值就在

$$\{(L, t) : 0 \leq t \leq T\} \cup ((0, L) \times \{0\})$$

上达到。注意到初值 h_0 的性质, 可知 h 的最小值一定在 $z=L$ 上达到。

定理3 设源汇项 $S_i=0$, $\beta(t)=h_0(L)$ 为常数, 并设(11)式成立。如果 h_0 的最大值在 $z=0$ 处达到, 最小值只在 $z=L$ 处取得, 则对任意 $T>0$, 方程(1)~(4)的解 h 在 Q_T 上的最大值必在 $z=0$ 上达到, 最小值必在 $z=L$ 上达到。

证 由性质8知, h 在 Q_T 上的最小值一定在 $z=L$ 上达到。若 h 的最大值也在 $z=L$ 上达到, 由于 $\beta(t)$ 为常数, 所以边界条件方程(3)推出 h 在 Q_T 上恒为常数, 于是 $\partial h / \partial z$ 恒为零, 这与边界条件方程(4)和假设(11)式矛盾。因此据性质2, h 的最大值一定在

$$\{(0, t) : 0 \leq t \leq T\} \cup ((0, L) \times \{0\})$$

上取到。进一步, 由初始值的条件知, 这个最大值就在 $z=0$ 上达到。

完全平行于定理2的证明, 我们有下面的定理。

定理4 设定理3的假设成立, 则对任意 $t \in (0, T)$, $h(z, t)$ 在闭区间 $[0, L]$ 上的最大值在 $z=0$ 处达到, 最小值在 $z=L$ 处达到。这表明当入渗强度大于饱和水传导率, 且初始时刻上边界达到饱和, 下边界达到最小含水率, 则对任何时刻 t , 含水率在上边界饱和, 而在下边界达到最小。

2.2 有限元集中质量法及离散极值原理

关于方程(1)~(4)的等价变分问题及其有限元逼近问题, 见文献[2, 3]。为了讨论格式的某些极值性质, 简述如下:

设

$$H_0^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega), v(L) = 0\},$$

这里 $H^1(\Omega)$ 为在区域 Ω 内直到一阶导数平方可积的 Sobolev 空间^[13]。将方程(1)~(4)的下底边界条件齐次化, 即令

$$h(z, t) = \bar{h}(z, t) + \beta(t),$$

写出如文献[3]中的变分形式。

我们先在空间方向用有限元逼近。对 $\Omega=(0, L)$ 作有限元剖分: $0=z_0 < z_1 < z_2 < \dots < z_{n+1}=L$, z_0 和 z_{n+1} 为边界点。令 $e_i=(z_i, z_{i+1})$ ($i=0, \dots, n$) 为 $n+1$ 个单元。定义有限元空间 $V_h \subset H_0^1(\Omega) : V_h = \{v_h \text{ 在 } [0, 1] \text{ 上是连续函数, } v_h|_{e_i} \text{ 是线性的, } 0 \leq i \leq n, \text{ 且 } v_h(L)=0\}$ 。令 $\{\phi_i\} \subset V_h$ 为有限元基函数^[14], $\phi_i(z_j) = \delta_{ij}$ ($i, j=0, \dots, n+1$)。因 $\bar{h} \in$

V_h , 故

$$h(z, t) = \sum_{i=0}^n z_i(t) \phi_i(z) + \beta(t).$$

从而所考虑定解方程(1)~(4)的半离散有限元逼近问题的矩阵形式为

$$\begin{cases} [A]\{X\} + [B]\left\{\frac{dX}{dt}\right\} = \{F\}, \\ \{X(0)\} = (h_0(z_0) - \beta(0), \dots, h_n(z_0) - \beta(0))^T, \end{cases} \quad (12)$$

其中

$$\begin{cases} [A] = [A_{ij}], A_{ij} = \int_0^L K(h) \frac{d\phi_i}{dz} \frac{d\phi_j}{dz} dz, \\ [B] = [B_{ij}], B_{ij} = \int_0^L C(h) \phi_i \phi_j dz, \\ \{F\} = [F_i], F_i = q(h) \phi_i|_0^L + (S_i, \phi_i) - \int_0^L K(h) \frac{d\phi_i}{dz} dz, \\ \{X\} = (X_0(t), \dots, X_n(t))^T, \\ \left\{\frac{dX}{dt}\right\} = \left(\frac{dX_0}{dt}, \dots, \frac{dX_n}{dt}\right)^T, i, j = 0, \dots, n, \end{cases} \quad (13)$$

(参见文献[2, 3])。方程(12)定义了一类非线性常微分方程组。要数值求解, 仍须对时间变量离散化。为此定义下面的逼近

$$\begin{cases} \left\{\frac{dX}{dt}\right\} \approx \frac{\{X\}^{t+\Delta t} - \{X\}^t}{\Delta t}, \\ \{X\}^{t+\Delta t/2} \approx \omega \{X\}^{t+\Delta t} + (1-\omega) \{X\}^t, \end{cases} \quad (14)$$

这里 Δt 是时间步长, 而 ω 是一个时间方向的带权系数。利用(14)式所引入的逼近代人在半时间层 $(t+\Delta t/2)$ 处定义的矩阵方程(12), 可得如下方程:

$$[P]^{t+\Delta t/2} \{X\}^{t-\Delta t/2} = [Q]^{t+\Delta t/2} \{X\}^t + \{F\}^{t+\Delta t/2}, \quad (15)$$

这里

$$\begin{cases} [P] = \omega[A] + \frac{1}{\Delta t}[B], \\ [Q] = (\omega-1)[A] + \frac{1}{\Delta t}[B]. \end{cases} \quad (16)$$

当 $\omega=1$ 时对应于时间方向为隐式差分格式, 即使其系数在半时间层求得, 仍然得到隐式差分。当 $\omega=1/2$ 时, 得到了 Crank-Nicolson 型算法。为了能求解方程(15), 需要在半时间层求系数 K 和 C 的分布, 以计算出(16)式中的系数矩阵 $[A]$ 、 $[B]$ 、 $[F]$ 以及(15)式中的系数矩阵 $[P]$ 、 $[Q]$ 。关于它们的求法, 详见文献[2, 3]。由于我们在实际计算中采用集中质量法, 将质量矩阵 $[B]$ 每行的非对角元全部放到主对角线上做代数求和, 从而避免振荡非物理解的产生。

在计算中, 使离散格式满足极值原理, 即传播误差由初始扰动误差来控制。这里的格式满足极值原理的关键是(16)式定义的矩阵 P 、 Q , 同时要满足 $P^{-1}Q$ 为正矩阵, 且它的各行元素的和不超过 1。

定理 5 若用集中质量法将质量矩阵 $[B]$ 的非对角元集中到主对角元, 所得的矩阵仍记为 B , 当时间步长适当小时, (15)式中的矩阵 P 和 Q 满足:

- (i) P 是正定对称阵, 且 P 的非对角元非正;
- (ii) $P^{-1}Q$ 是正矩阵;
- (iii) $P^{-1}Q$ 的行和不超过 1。

当 (16) 式中的 $\omega=1$ 时, 对时间步长无限制。从而离散极值原理成立。

由于篇幅所限, 略去本定理的证明。它表明利用有限元集中质量法, 可使离散格式满足通常的极值原理, 保持了非饱和土壤水流动的物理性质。然而, 当计算中采用有限元而不用质量集中法, (15) 式中的矩阵 P, Q 一般不满足定理 5 中的 (i)~(iii), 因而此时不一定满足极值原理, 有可能产生振荡非物理解。

3 稳定入渗和蒸发数值模拟

文献 [9] 在实验室里利用长 93.5 cm, 内部直径 6 cm 的玻璃柱管, 里面充满砂壤土, 密度为 1.66 g cm^{-3} , 在柱管土壤表面下面 7、22、37、52、67、82 cm 处装有湿度计, 每一个湿度计有压力传感器, 在不同深度土壤水含量的变化可通过 γ -射线的衰减而测得含水率。土壤的水传导率与含水量的关系通过分析不稳定流动中土壤含水量及水头分布而得到^[10,11]。土壤水头与含水量的关系可以通过湿度计所测数据确定水头和水分含量分布^[9]。下面的解析表达式是通过适合刻划这种土壤的所有数据点利用最小二乘法而求得:

$$\begin{cases} K(h) = K_s \frac{A}{A + |h|^r}, K_s = 34 \text{ cm h}^{-1}, A = 1.175 \times 10^6, r = 4.74 \\ \theta(h) = \frac{\alpha(\theta_s - \theta_r)}{\alpha + |h|^\beta} + \theta_r, \theta_s = 0.287, \theta_r = 0.075; \alpha = 1.611 \times 10^6, \beta = 3.96 \end{cases} \quad (17)$$

式中, h 的单位为 cm, 下标 s 为饱和, 即对于 $h=0$ 时 θ 的值, 下标 r 为残余含水率, 见文献 [9~11]。在柱管下端保持定常的水压, 而在土壤表面 ($z=0$) 保持一段时间定常的入渗通量 (13.69 cm h^{-1})。假设过了 0.7 h 以后, 表土以 4 mm h^{-1} 的强度蒸发, 当表土达到风干率时, $h(0, t) = -61.5 \text{ cm}$, 表土水头维持不变。入渗到该土壤下的初始和边界条件为

$$\begin{cases} h(0, z) = -61.5 \text{ cm (或 } \theta_a = 0.10 \text{ cm}^3 \text{ cm}^{-3}), z \in [0, 70] \\ q(t, 0) = \begin{cases} 13.69 \text{ cm h}^{-1}, & \text{当 } 0 < t < 0.7 \text{ h 时} \\ q = -0.4 \text{ cm h}^{-1}, & \text{当 } t > 0.7 \text{ h 时} \end{cases} \\ h(70, t) = -61.5 \text{ cm,} \end{cases} \quad (18)$$

将区域 $\Omega(0, 70)$ 分为 70 个单元, 每一单元的长度为 1 cm, 时间步长 $\Delta t = 5 \text{ s}$, 模拟 0.7 h, 利用这些数据输入该程序, 所得的水头与含水率分布如图 1、2 所示。这里的横坐标表示某一时刻的水头或含水率, 每条曲线代表某一时刻的水头或含水率分布, 纵坐标表示柱管内土壤深度。图 2 是初始入渗时以及从 0.1 h 开始每隔 0.1 h 的含水率分布曲线。由图 2 可以看出, 入渗开始到 0.1 h 这一段时间, 地表面层的含水率迅速从 0.1 上升到 0.25 以上, 随后, 地表层 $z=0$ 处的含水率变化不大, 然后地表逐步接近饱和含水率。初始时刻的含水率为 0.1, 以 $q=13.69 \text{ cm h}^{-1}$ 的强度入渗之后的最大含水率在上边界达到, 最小含水率在下边界达到, 与定理 3 的结论是吻合的。当 $t > 0.7 \text{ h}$ 时,

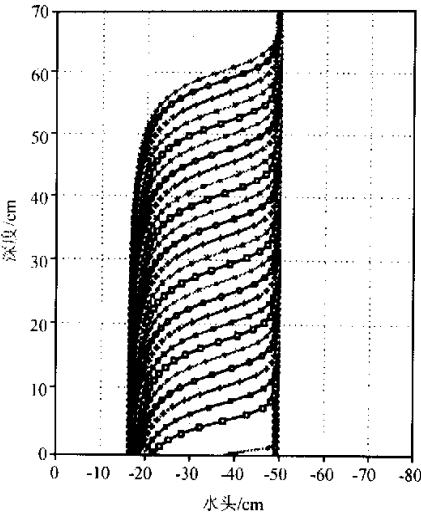


图 1 水头分布

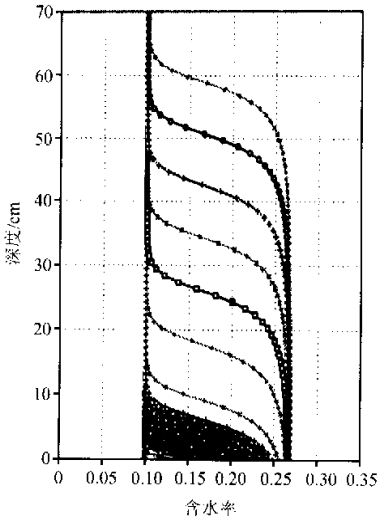


图 2 初始时刻及每隔 0.1 h 的含水率分布

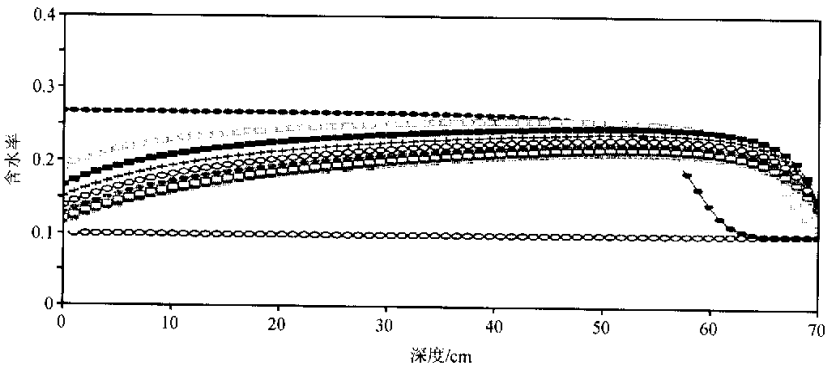


图 3 入渗、蒸发和土达到风干率过程的含水率分布

表土以 4 mm h^{-1} 的强度蒸发，即 $q = -4 \text{ mm h}^{-1}$ 。图 3 是在 0.7 h 以后每隔 0.1 h 的含水率分布曲线。由图可以看出，当开始蒸发时，表土的含水率降低，由于重力流的作用，靠近下底边界的含水率峰面继续向下推进。含水率的最大值在内部达到。这里的初始条件的最大值不在 $z=L$ 达到，因而没有满足定理 1 和 3 的条件。这一点表明定理 1 和 3 中初始条件在边界上取最大或最小的条件是不可缺少的。

4 结论与讨论

本文通过对文献 [2, 3] 中基于水头非饱和流模型极值原理的分析、讨论和数值模拟，表明数学模型及其离散格式满足所谓极值原理，正确地描述了特定的物理性质。

这些性质在陆面过程模式的研究中具有重要意义。方程(1)~(4)光滑解的存在唯一性的证明涉及到现代偏微分方程中专门理论,我们将另文论述。当边界条件从第二类变为第一类或从第一类变为第二类问题的整体性质,需要作进一步的研究。

参 考 文 献

- 1 Bear, J., *Dynamics of Fluids in Porous Media*, American Elsevier Publishing Company Inc., 1972.
- 2 Xie Zhenghui, Zeng Qingcun, and Dai Yongjiu, An unsaturated soil flow problem and its numerical simulation, *Advances in Atmospheric Sciences*, 1999, **16** (2), 183~198.
- 3 谢正辉、曾庆存、戴永久、王斌,非饱和流问题的数值模拟研究,中国科学(D辑),1998, **4** (14), 429~436.
- 4 雷志栋、杨诗秀、谢森传,土壤水动力学,北京:清华大学出版社,1988.
- 5 Dai Yongjiu, and Zeng Qingcun, A land surface models (IAP94) for climate studies. Part I: formulation and validation in off-line experiments, *Advances in Atmospheric Sciences*, 1997, **14**, 443~460.
- 6 叶笃正、曾庆存、郭裕福,当代气候研究,北京:气象出版社,1991.
- 7 Celia, M. A., E. T. Boulouton, and R. L. Zarba, A general mass conservation numerical solution for the unsaturated flow equation, *Water Resour. Res.* 1990, **26** (7), 1483~1496.
- 8 Rathfelder, K., and M. Abriola, Mass conservative numerical solutions of the head-based Richards equation, *Water Resour. Res.*, 1994, **30** (9), 2579~2586.
- 9 Haverkamp, R., M. Vauclin, J. Touma et al., A comparison of numerical simulation models for one-dimensional infiltration, *Soil Sci. Soc. Amer. J.*, 1977, **41**, 285~294.
- 10 Watson, K. K., An instantaneous profile method for determining the hydraulic conductivity of insaturated porous material, *Water Resour. Res.*, 1968, **2**, 709~715.
- 11 Vachaud, G., and J. L. Thony, Hyteresis during infiltration and redistribution in a soil column at different initial water contents, *Water Resour. Res.*, 1971, **7**, 111~127.
- 12 Friedman, A., *Partial Differential Equations of Parabolic Type*, Prentice Hall, Inc. 1964. (中译本:夏宗伟译,姜礼尚校,抛物型偏微分方程,北京:科学出版社,1984.)
- 13 Adams, R. A., *Sobolev Spaces*, New York: Academic Press, 1975. 26~74.
- 14 Ciarlet, P. C., *The Finite Element Methods for Elliptic Problems*, North-Holland, 1978, 1~50.

Maximum Principles for an Unsaturated Flow Problem

Xie Zhenghui¹⁾, Jian Huaiyu²⁾, and Zeng Qingcun¹⁾

1) (Institute of Atmospheric Physics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100029)

2) (Department of Applied Mathematics, Tsinghua University, Beijing 100084)

Abstract Maximum principles are studied for the problem of the fluid movement in unsaturated soils and its numerical scheme, and the maximum principles are theoretically proved to be true for the continuous problem and the corresponding numerical discrete problem. This shows that maxima and minima attain only at boundary points under certain conditions, hence particular physical properties are described. All these are important for the reserach of infiltration and evaporation.

Key words: unsaturated flow; discrete; extremum principle