

# 二次规划在调水决策和水分配问题中的应用

任保华<sup>1</sup> 黄平<sup>2,3</sup>

1 中国科学技术大学地球和空间科学学院, 合肥 230026

2 中国科学院大气物理研究所季风系统研究中心, 北京 100029

3 中国科学院研究生院, 北京 100039

**摘要** 首先用二次函数建立了企业用水量与其用水效益的关系, 然后根据这种关系, 利用拉格朗日乘数法来确定该地区最优化水资源分配方案, 并得到了该地区总的用水量与用水效益的关系, 最终建立了区域调水中各地区间的调水总量的分配模型。此时原问题转化为一个典型的二次规划问题, 结合各个地区的用水效益情况, 可实现对各地区、各行业分水。利用假设的理想数据对模型进行检验, 取得了较好的结果。对南水北调的实际情况, 根据北方6个缺水地区基本的水资源及工农业用水情况进行了实际数据模拟, 提出了南水北调的简单分配方案。该模型不仅可以用于区域间调水的优化控制, 而且还可应用到其他水资源分配与管理。

**关键词** 水资源 南水北调 二次规划 边际效益 分水模型

**文章编号** 1006-9585 (2006) 03-0361-10 **中图分类号** S274 **文献标识码** A

## Application of Quadratic Planning on Water Transfer and Allocation

REN Bao-Hua<sup>1</sup> and HUANG Ping<sup>2,3</sup>

1 *School of Earth and Space Science, University of Science and Technology of China, Hefei 230026*

2 *Center for Monsoon System Research, Institute of Atmospheric Physics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100029*

3 *Graduate University of the Chinese Academy of Sciences, Beijing 100039*

**Abstract** By using the quadratic function, we firstly establish a quantitative mathematical relation between the water consumption and the benefit for enterprises and then based on this relation and Lagrange's multiplier method, deduce the optimal regional water resource allocation model and the relation between the regional total water consumption and the total benefits as well. And finally a regional water transfer allocation model is set up, which can be applied to allocate the water amount over different regions and different enterprises. The model is validated by several ideal data and simulated results show the model is robust in controlling the water allocation. We then apply the model to the real data set of six northern provinces and confirm the good applicability and potential in both regional water transfer optimal control and the other water resources management.

**Key words** water resources, South-to-North Water Transfer, quadratic planning, marginal benefit, model of water allocation

**收稿日期** 2006-03-15 收到, 2006-04-12 收到修定稿

**资助项目** 中国科学院知识创新工程重要方向项目 KZCX3-SW-218 和国家自然科学基金资助项目 40275013

**作者简介** 任保华, 男, 1962年出生, 博士, 副教授, 主要从事东亚季风和低频振荡等研究。E-mail: ren@ustc.edu.cn

## 1 引言

许多学者<sup>[1~4]</sup>研究指出,近几十年来我国降水发生了明显变化,江淮流域和东北地区降水偏多,华南和华北地区降水减少。尤其是华北地区降水量在最近40年经历了两次明显的变化:从1965年以来逐年减少,特别是20世纪80年代到90年代初,华北地区降水量减少幅度再次明显增大,80年代的降水约比50年代减少了近30%<sup>[5]</sup>,干旱化日趋严重。这种日益加剧的干旱化趋势已对华北地区的生产活动和人民生活产生了重大影响,严重制约了社会经济的发展。

为缓解华北地区水资源的严重短缺,我国实施了南水北调战略工程。通过大量的野外勘查和测量,在分析比较50多种方案的基础上,推荐了东线、中线和西线3条调水线路。通过3条调水线路与长江、黄河、淮河和海河四大江河的联系,构成以“四横三纵”为主体的总体布局,以利于实现我国水资源南北调配、东西互济的合理配置格局。

在南水北调的过程中一个重要问题就是:调水的优化配置。由于各个地区的水资源、人口、环境以及社会经济等各个方面存在着较大的差异,那么怎样在地区间以及地区的各个行业间分配调来的有限的水资源,使得调水分配后在保证满足生活用水情况下各个地区产生的经济效益总和最大?这成为南水北调最优调配的重要问题之一。

国内的区域间调水分配研究中,已有不少学者提出了自己的观点。王先甲<sup>[6]</sup>以及李令跃和甘泓<sup>[7]</sup>提出了基于多目标的水资源分配的思想。王劲峰等<sup>[8]</sup>提出了水资源空间配置的边际效益均衡模型,王智勇等<sup>[9]</sup>进行了河北省平原地区水资源利用的边际效益分析。

本文利用拉格朗日乘数法,提出了一个利用受水地区的用水效益来确定受水地区的分配水量的模型;并利用二次规划对模型进行求解。

## 2 数学模型简介

在现代西方经济学中,边际效益理论是最基本的理论之一<sup>[10]</sup>。边际效益是指:在其他生产要素一定的情况下,厂商增加某个生产要素所得来

的受益增加随着该项生产要素的增加而减小。这是因为,在该项生产要素缺乏的情况下,它是限制生产的主要条件,而其他的生产要素并未得到充分的利用;随着该项生产要素的增加,受益也增加,同时其他生产要素得到更好的利用;当这项生产要素增加到一定程度时,不再是限制生产的主要因素,由它增加带来的收益增加不再明显。这就是现代西方经济学中边际理论在生产中的应用情况,一般来说可用一个简单的二次函数来大致描述这个理论。

建立数学模型之前,本文引入了以下基本假设:1)把调往某个地区的水考虑成一个整体,即某个地区调的水单位成本都是一样的,该地区内部的调水成本没有差异;2)考虑某个地区各个部门的效益随用水量变化时,在其他生产条件不变的情况下,把用水效益看成是用水量的二次函数。同时把边际效益为零的用水量称为需水量,并和当前用水量一起决定当前缺水量。由此我们建立了调水分配的数学模型。

### 2.1 拉格朗日乘数法

在实际应用中会遇到一些求极值的问题,其中条件极值是一类重要的问题,即函数 $f(x, y, \dots)$ 在自变量 $(x, y, \dots)$ 受到一定限制的条件下,函数 $f(x, y, \dots)$ 的极值问题。对于此类问题,数学上一般用拉格朗日乘数法来解决。

拉格朗日乘数法:欲求函数 $z=f(x, y)$ 在条件 $\phi(x, y)=0$ 限制下的极值点,先要构成辅助函数

$$F(x, y) = f(x, y) + \lambda\phi(x, y)$$

的驻点方程,即

$$\begin{cases} F'_x(x, y) = 0, \\ F'_y(x, y) = 0, \end{cases}$$

也就是

$$\begin{cases} f'_x(x, y) + \lambda\phi'_x(x, y) = 0, \\ f'_y(x, y) + \lambda\phi'_y(x, y) = 0, \end{cases}$$

并与联系方程 $\phi(x, y)=0$ 联立从中解出 $x, y, \lambda$ ,则方程的解就可能是条件极值点。

对于多元函数 $f(x, y, \dots)$ 以上的方法完全适用,这时要对每个自变量求导得到多个方程联立解出极值点。

### 2.2 二次规划

在运筹学中,若某非线性规划的目标函数为

自变量  $X$  的二次函数，约束条件又全是线性的，就称这种规划为二次规划。二次规划是非线性规划中比较简单的一类，它较容易求解。由于很多方面的问题都可以抽象成二次规划的模型，而且它和线性规划又有直接联系，因此它是运筹学中一种重要的类型。二次规划的数学模型可表述如下：

$$\left\{ \begin{array}{l} \min(f(x)) = \sum_{j=1}^n c_j x_j + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n c_{jk} x_j x_k, \\ \text{目标函数} \\ c_{jk} = c_{kj}, k = 1, 2, \dots, m, \\ \text{目标函数中对称性条件} \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + b_i \geq 0, j = 1, 2, \dots, m, \\ \text{限制条件 1} \\ x_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, n, \\ \text{限制条件 2} \end{array} \right.$$

基于上述的数学理论，给出以下数学模型。

### 2.3 企业用水模型

对于某个企业  $j$ ，在当前生产规模不变的情况下，随着水分配量的增加经济效益应该逐步增加，但是随着这种增加其他生产资料的被更充分利用，用水成本增高，以及处理污水的费用增大，这种增加速度将逐步减小，并且当用水量增加到实际需水量（这个量可由其生产规模大致决定）时，其用水效益不再随用水量增加，此后改为减少。由上我们考虑用一个简单的二次函数来描述收益  $E$  和用水量  $Q$  的关系。概念图如图 1 所示。

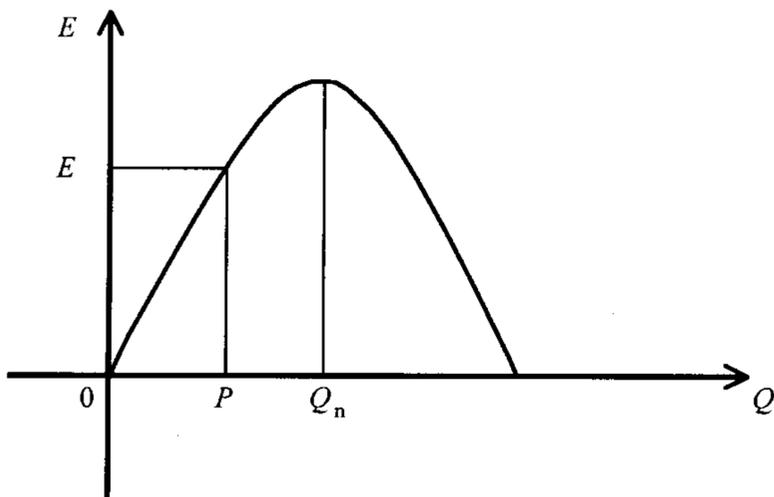


图 1 收益  $E$  和用水量  $Q$  关系概念图 ( $P$  为实际的用水量,  $E$  为收益,  $Q_n$  为实际需水量)

Fig. 1 Sketch map of relationship between benefit and quantities of water.  $P$ : actual used water quantities;  $E$ : actual benefit;  $Q_n$ : need of water

从图 1 可看出：二次函数曲线过  $(0, 0)$  点；当用水满足需水为  $Q_n$  时，收益  $E$  处于最大值。

令： $Q_n = (1+k)P$ ,

$k$  为实际缺水量的百分比。

由上，可将  $E(Q)$  简单的表示为

$$E(Q) = -aQ^2 + bQ, a > 0$$

利用上述条件有

$$\begin{cases} E = -aP^2 + bP, \\ \frac{b}{2a} = Q_n, \end{cases}$$

解之易得

$$\begin{cases} a = \frac{E}{2Q_n P - P^2}, \\ b = \frac{2EQ_n}{2Q_n P - P^2}, \end{cases}$$

由此可得单个企业增加的效益为

$$\begin{aligned} \Delta E &= \{[-a(P+Q)^2 + b(P+Q)] - (-aP^2 + bP)\} - [(P+Q)\alpha\beta - P\alpha\beta] \\ &= -2aPQ - aQ^2 + bQ - Q\alpha\beta \\ &= -aQ^2 + 2aQ\left(\frac{b}{2a} - P\right) - Q\alpha\beta \\ &= -aQ^2 + 2aQ(Q_n - P) - Q\alpha\beta \\ &= -aQ^2 + 2aQkP - Q\alpha\beta \\ &= -\frac{E}{(2k+1)P^2}Q^2 + \left[\frac{2Ek}{(2k+1)P} - \alpha\beta\right]Q, \end{aligned}$$

上式中的  $\alpha$  为该企业的单位污水处理所需的费用， $\beta$  为用水的二次使用率。

### 2.4 地区用水模型

在单个企业  $j$  用水效益的基础上，考虑某地区  $i$  的总体用水效益。将  $\Delta E_{ij}$  写成如下形式：

$$\Delta E_{ij} = -A_{ij}Q_{ij}^2 + B_{ij}Q_{ij},$$

其中

$$\begin{aligned} A_{ij} &= \frac{E_{ij}}{(2k_{ij} + 1)P_{ij}^2}, \\ B_{ij} &= \frac{2E_{ij}k_{ij}}{(2k_{ij} + 1)P_{ij}} - \alpha_{ij}\beta_{ij}, \end{aligned}$$

则地区  $i$  的总体效益增长随用水的变化描述成

$$\Delta E_i = \sum_j (-A_{ij}Q_{ij}^2 + B_{ij}Q_{ij}),$$

地区  $i$  的用水量限制条件为

$$\begin{aligned} &\sum_j (P_{ij} + Q_{ij}) + Q_{iag} + Q_{ie} + Q_{ilife} \\ &= Q_{inow} + Q_i + \sum_j \beta_{ij}(P_{ij} + Q_{ij}) + \beta_{iag}Q_{iag} + \\ &\beta_{ie}Q_{ie} + \beta_{ilife}Q_{ilife}, \end{aligned}$$

可得出

$$\sum_j (1 - \beta_{ij}) Q_{ij} = Q_i + Q_{inow} - [\sum_j (1 - \beta_{ij}) P_{ij} + (1 - \beta_{iag}) Q_{iag} + (1 - \beta_{ie}) Q_{ie} + (1 - \beta_{ilife}) Q_{ilife}]$$

由以上假设可令

$$Q_{iconst} = Q_{inow} - [\sum_j (1 - \beta_{ij}) P_{ij} + (1 - \beta_{iag}) Q_{iag} + (1 - \beta_{ie}) Q_{ie} + (1 - \beta_{ilife}) Q_{ilife}] \Rightarrow \sum_j (1 - \beta_{ij}) Q_{ij} = Q_i + Q_{iconst}$$

其中,  $Q_{inow}$  为该地区原有可用水量,  $Q_{iag}$  为农业用水量,  $Q_{ie}$  为生态环境用水量,  $Q_{ilife}$  为生活用水量,  $Q_i$  为调往该地区的水量,  $\beta$  为污水的二次使用率。那么在该地区调水一定的情况下, 总体经济效益最大的规划问题便可以表述成:

$$\Delta E_i = \sum_j (-A_{ij} Q_{ij}^2 + B_{ij} Q_{ij}),$$

$$\sum_j (1 - \beta_{ij}) Q_{ij} = Q_i + Q_{iconst}.$$

求解以上问题可用拉格朗日乘法<sup>[6]</sup>, 将

$$\sum_j (1 - \beta_{ij}) Q_{ij} = Q_i + Q_{iconst},$$

表示成

$$G(Q_{i1}, Q_{i2}, \dots, Q_{in}) = 0.$$

作辅助函数:

$$F(Q_{i1}, Q_{i2}, \dots, Q_{in}) = \Delta E_i + \lambda G(Q_{i1}, Q_{i2}, \dots, Q_{in}) = 0,$$

将上式对每一个  $Q_{ij}$  求偏导, 可得到与企业数相等的  $n$  个方程。

$$-2A_{ij} Q_{ij} + B_{ij} + \lambda(1 - \beta_{ij}) = 0,$$

解出

$$Q_{ij} = \frac{B_{ij} + \lambda(1 - \beta_{ij})}{2A_{ij}},$$

代入

$$G(Q_{i1}, Q_{i2}, \dots, Q_{in}) = 0,$$

有

$$\sum_j (1 - \beta_{ij}) \frac{B_{ij} + \lambda(1 - \beta_{ij})}{2A_{ij}} = Q_i + Q_{iconst},$$

解出  $\lambda$  得

$$\lambda = \frac{Q_i + Q_{iconst} - \sum_j (1 - \beta_{ij}) B_{ij} / 2A_{ij}}{\sum_j (1 - \beta_{ij})^2 / 2A_{ij}},$$

将  $\lambda$  代入得

$$Q_{ij} = \frac{B_{ij} + (1 - \beta_{ij}) \left[ \frac{(Q_i + Q_{iconst}) - \sum_j \frac{(1 - \beta_{ij}) B_{ij}}{2A_{ij}}}{\sum_j \frac{(1 - \beta_{ij})^2}{2A_{ij}}} \right]}{2A_{ij}}, \quad (1)$$

从上式可以看出, 虽然各个企业分配的水量形式很复杂, 但  $Q_{ij}$  还是与该地区总的分配水量  $Q_i$  成线性关系, 因此可以将其简写成

$$Q_{ij} = C_{ij} Q_i + D_{ij},$$

将  $Q_{ij}$  的表达式代入地区  $i$  的效益增加值得

$$\Delta E_i = \sum_j [-A_{ij} (C_{ij} Q_i + D_{ij})^2 + B_{ij} (C_{ij} Q_i + D_{ij})]$$

$$= [\sum_j -A_{ij} C_{ij}^2] Q_i^2 + [\sum_j (C_{ij} B_{ij} - 2A_{ij} C_{ij} D_{ij})] Q_i + [\sum_j B_{ij} D_{ij} - A_{ij} D_{ij}^2],$$

且可将  $\Delta E_i$  表示成

$$\Delta E_i = X_i Q_i^2 + Y_i Q_i + Z_i,$$

由上可见,  $\Delta E_i$  是  $Q_i$  的二次函数, 且各项系数是由最初假设中地区  $i$  企业  $j$  的各项参数的组合数得出。

另外, 从上式可以看出即使  $Q_i = 0$ , 也会存在一定的  $\Delta E_i$  即效益增加值。这是因为即使  $Q_i = 0$ , 以上的水分配过程其实相当于在地区  $i$  内部原有水的基础上进行优化, 如果原来的水分配已经优化过, 那么  $Z_i = 0$ 。

### 2.5 地区间分水模型

设地区  $i$  的单位调水的成本为  $M_i$ ,  $Q_{all}$  为各个地区的调水总量的最大值, 则整个调水规划问题变成一个二次规划的问题:

$$\begin{cases} \max(\Delta F_{all}) = \sum_j [X_i Q_i^2 + (Y_i - M_i) Q_i + Z_i], \\ \sum_j Q_i \leq Q_{all}, \\ Q_i \geq 0, \end{cases}$$

解此可得出  $\max(\Delta E_{all})$ , 以及各个地区相应的  $Q_i$ 。

在限制条件下, 有可能

$$\max(\Delta E_{all}) = \sum_i Z_i,$$

且  $Q_i = 0$ 。这是因为  $M_i$  的作用, 即调水成本过高, 调水后没有收益, 不宜调水。

若结果不是上述情况, 那么根据各个  $Q_i$  值, 可以大致确定各个调水段水利工程的规模。

至此, 总体调水的各个地区分水问题已基本解决。

### 2.6 地区内各行业分水模型

根据上一步的结果得出各个地区的调水情况，然后根据公式 (1) 可以得出行业  $ij$  的水分配情况，这又解决了受水地区内部各个行业的分水问题。

## 3 假设检验和实际数据模拟

### 3.1 模型的假设检验

为了考察文中建立的数学模型是否合理，我们用假想数据对不同情况进行了模拟。假定了几个地区几个行业缺水量、用水量、用水效益、单位用水效益等条件数据，主要检验了地区用水模型和地区间分水模型。

利用地区用水模型对以下 4 种情况进行了模拟，以检验缺水量、用水量、用水效益、单位用水效益等量对分水量的影响 (见图 2)。模拟 1 (图 2a)，缺水量相同，用水量相同，效益不同；模拟 2 (图 2b)，效益相同，用水量相同，缺水量不同；模拟 3 (图 2c)，效益相同，缺水量相同，用水量不同；模拟 4 (图 2d)，缺水量相同，用水

量不同，效益不同，但单位用水产生的效益相同。

从图 2 可以看到，模拟 1 (图 2a)，分配的水量基本随着用水效益的增长而增长，但并不呈线性关系；模拟 2 (图 2b)，缺水量大的应分配的水量较多，而且两者基本成线性关系。模拟 3 (图 2c)；用水多 (单位水产生的效益少) 的分配的水少；模拟 4 (图 2d)，显然分配水量随生产规模的增大而增大，而且是呈线性关系。可见，本模型对水量分配有很好的处理能力。

从地区间分水模型的各种理想模拟结果 (图略) 来看，对缺水多、效益好的地区分配的水量多，反之则分配的水量少。由此表明该模型有很好的应用价值。

### 3.2 实际数据来源

本文的模拟中数据主要考虑了华北 6 个严重缺水的地区：北京、天津、河北、山西、内蒙古、山东等。

本文数据中各个地区的主要用水情况 (2000 年农业用水量，生活用水量，工业用水量，工业产值) 来源于中国科学院地理科学与资源研究所中国自然资源数据库<sup>[11]</sup>。南水北调的基本情况

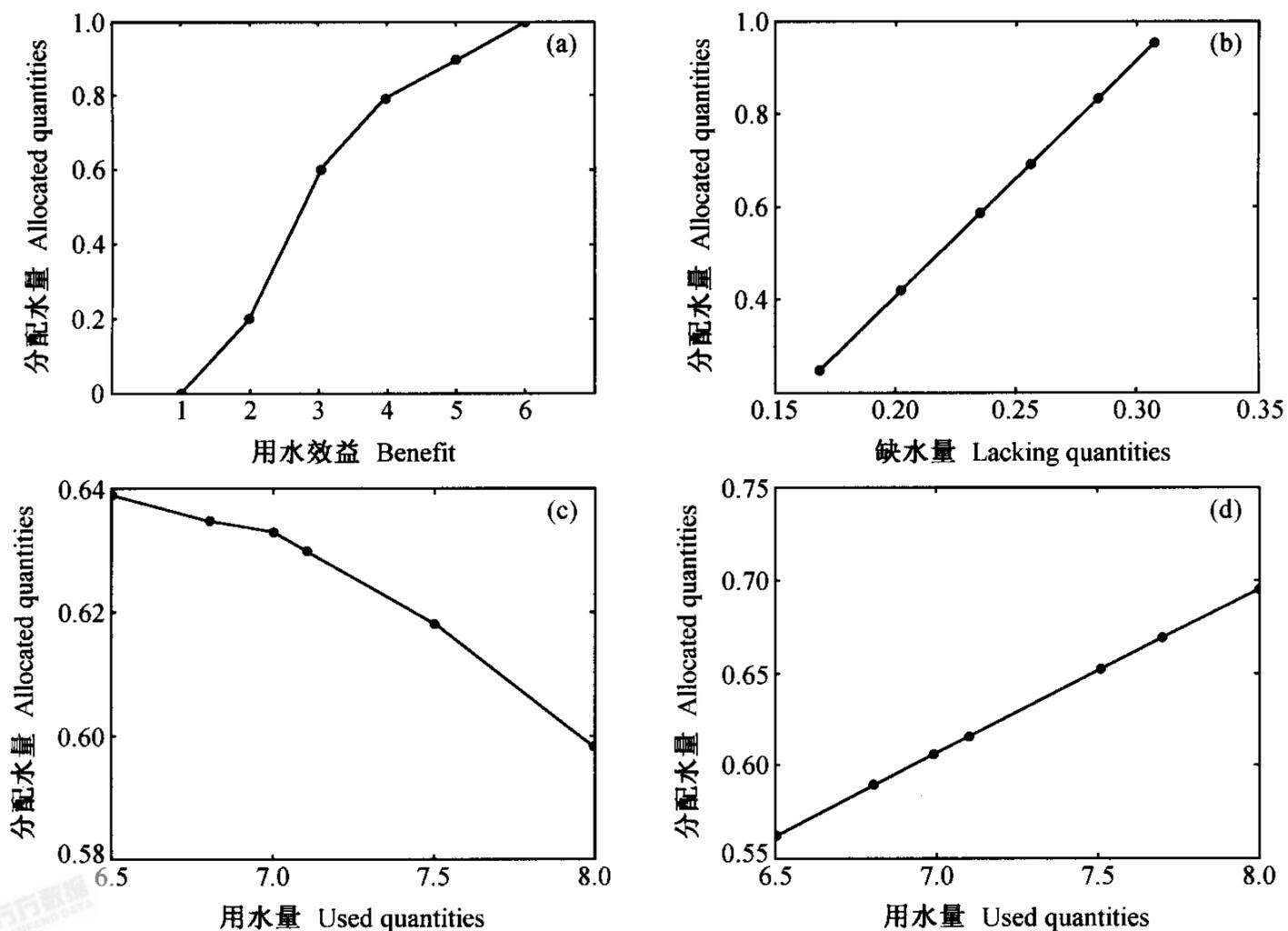


图 2 地区用水模型的 4 种理想模拟结果：(a) 模拟 1；(b) 模拟 2；(c) 模拟 3；(d) 模拟 4

Fig. 2 Four results of simulation by local utilizing water model; (a) Simulation 1; (b) Simulation 2; (c) Simulation 3; (d) Simulation 4. Data in this figure are dimensionless

(总的调水量, 调水成本) 来源于国家南水北调官方网站<sup>[12]</sup>。各个地区缺水率来源于各地区的年度水利报告。

### 3.3 实际数据模拟

实际数据模拟时进行了以下处理:

(1) 由于一般的统计数据中仅将用水考虑成农业用水, 生活用水, 工业用水等3个部分。因此在本文的模拟中不考虑生态用水, 将其值取为0。

(2) 由于各个地区的各种工业用水数据缺乏, 因此将整个工业考虑成一个整体。

(3) 对于污水处理的问题, 由于我国现阶段对污水处理的统计一般是以企业为单位, 计算企业的耗水率, 并将污水处理后的二次回用一并计算在取水中, 因此本文的模拟中不考虑污水处理, 将其值取为0。

(4) 如果南水北调的总水量太大 ( $250 \times 10^8 \sim 450 \times 10^8 \text{ m}^3$ ), 将完全满足北方地区用水的需要, 则地区间就没有调水量的竞争, 模型就没有意义。因此将调水量按  $200 \times 10^8 \text{ m}^3$  (基本满足各个地区总需要), 和  $150 \times 10^8 \text{ m}^3$  (不能满足各个地区的总需要, 地区间存在竞争) 来考虑。

(5) 在模型中充分考虑了农业的重要性 (即首先满足农业用水), 但是由于农业用水的效益远

远低于工业用水, 且用水量巨大, 因此, 这样考虑的时候对农业用水较少的地区不公平, 效果不是很好。对此, 在模拟中提出了第二种形式, 即保持当前的农业用水状况。

(6) 在分两种情况考虑农业用水的同时, 考虑首先满足生活用水。

(7) 农业需水量、生活需水量由当前的农业用水量、生活用水量  $\times (1 + \text{缺水率})$  得出。

(8) 对于单位调水费用的确定, 由于目前没有一个比较合适的量参考, 因此本文按照受水地区离调水地区的物理距离来处理。

这样处理后用于模拟的基本数据列在表1。用此数据和前述的地区间水分配模型进行了3种情况下的模拟。

#### 3.3.1 模拟1

模拟情况1: 假设总调水为  $200 \times 10^8 \text{ m}^3$ , 在保证生活用水的前提下, 首先保证农业用水。由此模拟得出的结果分别见表2和图3。从图3可以看到:

(1) 缺水量、线性效益这两个表征用水情况的量, 与模拟结果所得的分配水量、分配水率呈明显的正相关。

(2) 由于北京、天津两地区的用水规模较小, 因此调水量较小, 但调水率较大, 几乎等于缺水

表1 基本数据

Table 1 Basic data

	北京 Beijing	天津 Tianjin	河北 Hebei	山西 Shanxi	内蒙 Nei Mongol	山东 Shandong
农业用水量 Used quantities by agriculture/ $10^8 \text{ m}^3$	16.49	12.08	161.74	35.06	155.13	175.92
农业需水量 Required quantities of agriculture/ $10^8 \text{ m}^3$	21.27	15.95	219.97	44.42	186.16	228.70
生活用水量 Used quantities by living/ $10^8 \text{ m}^3$	13.39	5.22	23.08	7.92	8.71	24.44
生活需水量 Required quantities of living/ $10^8 \text{ m}^3$	17.27	6.89	31.89	10.34	10.45	31.77
工业用水量 Used quantities by industry/ $10^8 \text{ m}^3$	10.52	5.34	27.34	13.38	8.4	43.62
工业总产值 Production value of industry/ $10^8 \text{ Yuan (RMB)}$	2697	3141	7389	2478	1313	12829
缺水率 Rate of lack	0.290	0.320	0.360	0.267	0.200	0.300
单位调水费用 Unit cost of allocation/ $\text{Yuan} \cdot \text{m}^{-3}$ (RMB)	0.8	0.6	0.6	0.4	0.8	0.4
当前总用水量 All used quantities/ $10^8 \text{ m}^3$	40.40	22.64	212.16	56.36	172.24	243.98

表 2 模拟 1 结果

Table 2 Result of the first simulation

	北京 Beijing	天津 Tianjin	河北 Hebei	山西 Shanxi	内蒙 Nei Mongol	山东 Shandong
农业用水量 Used quantities by agriculture/ $10^8 \text{ m}^3$	21.27	15.95	220.00	44.40	186.20	228.70
生活需水量 Required quantities of living/ $10^8 \text{ m}^3$	17.27	6.89	31.89	10.34	10.45	31.77
工业用水量 Used quantities by industry/ $10^8 \text{ m}^3$	10.52	5.34	27.34	13.38	8.40	43.62
工业总产值 Production value of industry/ $10^8 \text{ Yuan (RMB)}$	2697	3141	7389	2478	1313	12829
缺水率 Rate of lack	0.29	0.32	0.36	0.27	0.20	0.30
生活缺水量 Lack quantities of living/ $10^8 \text{ m}^3$	3.88	1.67	8.81	2.42	1.74	7.33
当前总用水量 All used quantities/ $10^8 \text{ m}^3$	40.40	22.64	212.16	56.36	172.24	243.98
分配水量 Allocated quantities/ $10^8 \text{ m}^3$	9.988	6.848	71.771	12.058	32.441	66.893
分配水率 Rate of allocation	0.247	0.302	0.338	0.214	0.188	0.274
线性效益 Linear benefit/ $\text{Yuan} \cdot \text{m}^{-3} \text{ (RMB)}$	256	588	270	186	156	294

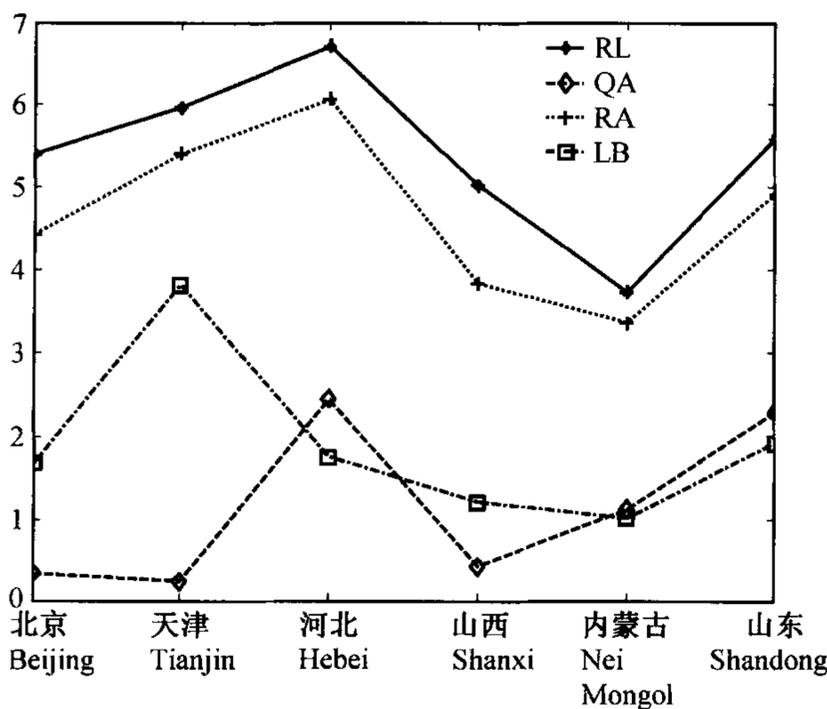


图 3 模拟 1, 6 省市缺水率 (RL)、线性效益 (LB)、分配水量 (QA)、分配水率 (RA) 曲线 (为比较 4 个量之间的影响, 忽略它们的量纲, 将之作于同一图中, 纵坐标无数值意义)  
Fig. 3 Result of the first simulation. RL: Rate of lack; LB: Linear benefit; QA: Quantities of allocation; RA: Rate of allocation. To compare the four variables, the data in figure are dimensionless

率, 即可以满足用水的需要。

(3) 由于优先考虑农业的因素, 造成河北、

内蒙古两个农业用水量大的地区分配水较多, 而农业用水较少的山西分配水量较少, 分配水率也较小。

(4) 由于调水总量大, 因此各个地区间的竞争不大, 调水量几乎等于缺水量, 基本上能满足用水需求。

从上面模拟 1 结果的定性分析来看, 模型取得了较好的效果; 但由于调水量大, 所以各个地区间调水的竞争较小, 模型的作用体现得不是很明显。

### 3.3.2 模拟 2

假设调水量减少到调水  $150 \times 10^8 \text{ m}^3$  (存在较大的调水竞争), 其他条件同模拟 1。结果分别见表 3 和图 4。从图 4 可以看到:

(1) 缺水量、线性效益这两个表征用水情况的量, 与模拟结果所得的分配水量、分配水率呈明显的正相关。

(2) 由于调水量比较少, 因此各个地区间存在着较明显的竞争, 同时由于优先考虑农业的作用, 因此河北、内蒙古两个农业用水较多的地区分配到了较多的水。而北京、山西两个地区由于农业用水少, 因此在此情况下分配到的水较少。

表 3 模拟 2 结果

Table 3 Result of the second simulation

	北京 Beijing	天津 Tianjin	河北 Hebei	山西 Shanxi	内蒙 Nei Mongol	山东 Shandong
农业需水量 Required quantities of agriculture/ $10^8 \text{ m}^3$	21.27	15.95	219.97	44.42	186.16	228.70
生活需水量 Required quantities of living/ $10^8 \text{ m}^3$	17.27	6.89	31.89	10.34	10.45	31.77
工业用水量 Used quantities by industry/ $10^8 \text{ m}^3$	10.52	5.34	27.34	13.38	8.40	43.62
工业总产值 Production value of industry/ $10^8 \text{ Yuan (RMB)}$	2697	3141	7389	2478	1313	12829
缺水率 Rate of lack	0.29	0.32	0.36	0.27	0.20	0.30
生活缺水 Lack quantities of living/ $10^8 \text{ m}^3$	3.88	1.67	8.81	2.42	1.74	7.33
当前总用水量 All used quantities/ $10^8 \text{ m}^3$	40.40	22.64	212.16	56.36	172.24	243.98
分配水量 Allocated quantities/ $10^8 \text{ m}^3$	5.199	5.749	58.890	3.933	26.866	49.364
分配水率 Rate of allocation	0.129	0.254	0.278	0.070	0.156	0.202
线性效益 Linear benefit/ $\text{Yuan} \cdot \text{m}^{-3}$ (RMB)	256	588	270	186	156	294

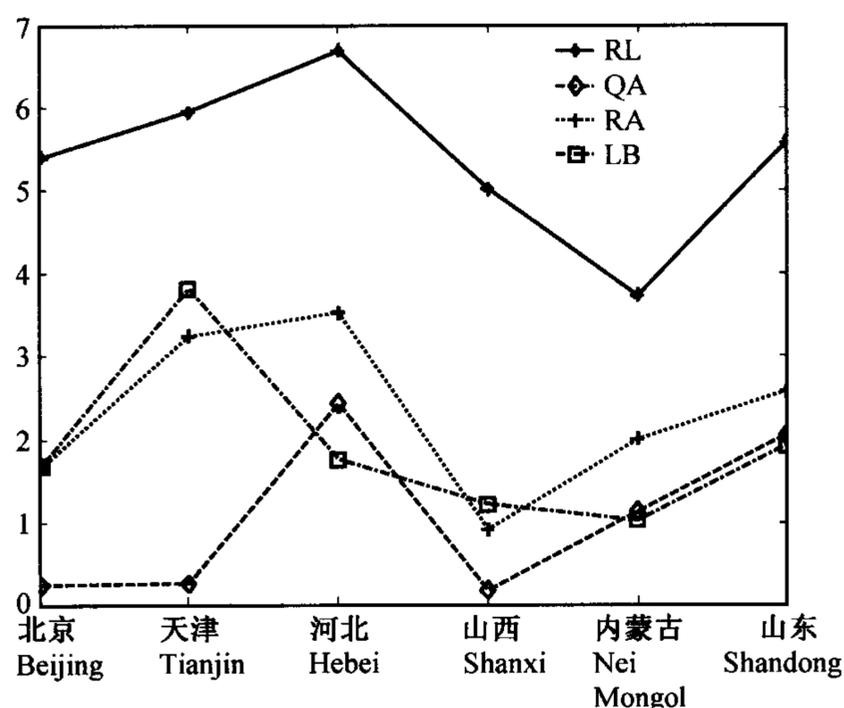


图 4 模拟 2 结果, 其余同图 3

Fig. 4 As in Fig. 3 except for result of the second simulation

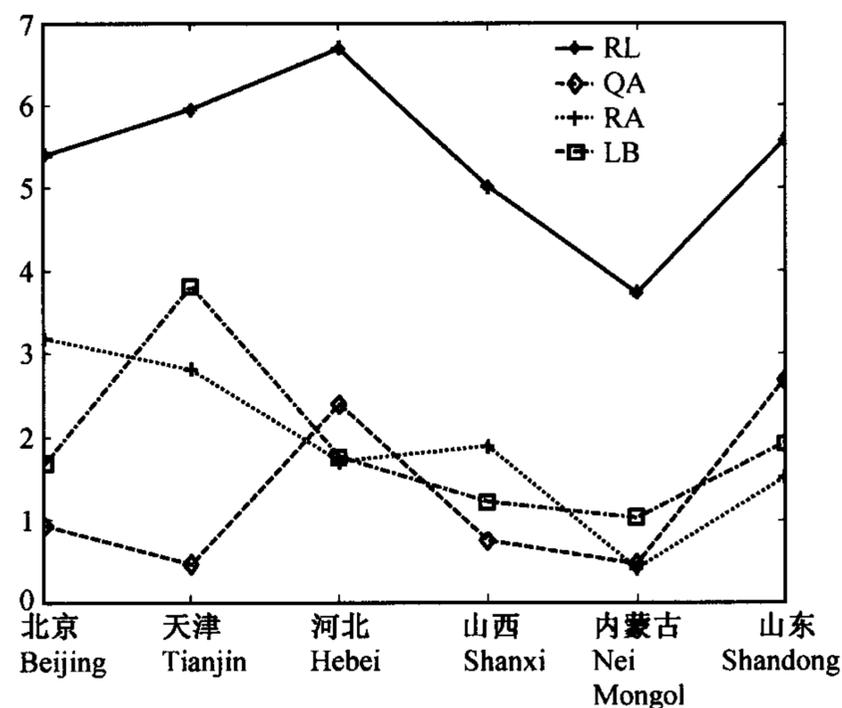


图 5 模拟 3 结果, 其余同图 3

Fig. 5 As in Fig. 3 except for result of the third simulation

(3) 由于地区间的竞争激烈, 因此天津、山东这两个用水效益好的地区都分配到了相对较多的水资源 (分配水率高)。

从上面对模拟 2 结果的定性分析来看, 总体上模型的模拟能力还是很好的。只是由于各个地区间农业用水差异太大的缘故, 导致在个别地区

可能与实际情况有较大的不符, 首先保证农业用水的假设在这种情况下不很适用。

### 3.3.3 模拟 3

调水  $150 \times 10^8 \text{ m}^3$  (同模拟 2), 但不优先考虑农业 (保持现阶段农业用水的量)。结果分别见表 4 和图 5。从图 5 可以看到:

表 4 模拟 3 结果  
Table 4 Result of the third simulation

	北京 Beijing	天津 Tianjin	河北 Hebei	山西 Shanxi	内蒙 Nei Mongol	山东 Shandong
农业用水量 Used quantities by agriculture/ $10^8 \text{ m}^3$	16.49	12.08	161.74	35.06	155.13	175.92
生活需水量 Required quantities of living/ $10^8 \text{ m}^3$	17.27	6.89	31.89	10.34	10.45	31.77
工业用水量 Used quantities by industry/ $10^8 \text{ m}^3$	10.52	5.34	27.34	13.38	8.40	43.62
工业总产值 Production value of industry/ $10^8 \text{ Yuan (RMB)}$	2697	3141	7389	2478	1313	12829
缺水率 Rate of lack	0.29	0.32	0.36	0.27	0.20	0.30
生活缺水量 Lack quantities of living/ $10^8 \text{ m}^3$	3.88	1.67	8.81	2.42	1.74	7.33
当前总用水量 All used quantities/ $10^8 \text{ m}^3$	40.40	22.64	212.16	56.36	172.24	243.98
分配水量 Allocated quantities/ $10^8 \text{ m}^3$	6.91	3.37	18.14	5.60	3.40	20.37
分配水率 Rate of allocation	0.17	0.15	0.09	0.10	0.02	0.08
线性效益 Linear benefit/ $\text{Yuan} \cdot \text{m}^{-3} \text{ (RMB)}$	256	588	270	186	156	294

(1) 缺水量、线性效益这两个表征用水情况的量，与模拟结果所得的分配水量、分配水率大致呈现正相关。这主要是由于在调水不多的情况下，缺水率和用水效益共同决定分配，且这两个量之间会存在矛盾，因此不同于模拟 1 和模拟 2 中模拟的 4 个量之间都呈现出非常明显的正相关，这正是本模型的作用所在。

(2) 由于并未首先考虑农业用水，因此与模拟 1 和模拟 2 明显不同。河北、内蒙古这两个农业用水较大的地区因为工业用水效益低，分配水率明显较低，远远低于缺水率，不能满足需要。同时，与前两个模拟相反，北京、山西这两个农业用水较少的地区由于工业用水效益相对高，分配到较多的水量。

(3) 调水总量受用水规模的控制较明显，但由于并未优先考虑农业用水，因此这里的用水规模主要是指工业用水。同时调水量受到地区缺水率、用水效益的制约。

由于调水量较少，各个地区间存在较大的竞争，同时受农业用水量的干扰较小，模型能够更准确地从各地区的用水情况得到较合理的调水分配方案。

#### 4 结论和讨论

本文基于水资源利用的边际效益思想，并

将这种思想用二次函数明确地表示出来，因此建立了行业用水量与其用水效益的关系模型。基于这种关系，利用拉格朗日乘数法对地区内部的各个行业进行优化分水，得出了整个地区工业用水量与其工业用水效益之间的二次函数关系，进一步在此二次函数关系的基础上，利用运筹学中的二次规划的思想，建立各个地区间在调水分配中水量分配的数学模型。从而利用这个水量分配的数学模型以及地区间各行业的用水情况来分配各个行业的用水量。至此，建立起一套以各个地区的实际用水效益为基础的水资源优化分配模型。

通过对理想状况的模拟，表明本模型对水资源的优化分配有较好的效果。利用实际数据对南水北调的调水分配方案在几种情况下进行了模拟，其结果显示该模型能较好地对水资源合理进行分配。

一般来说，缺水率大、效益高的地区分水较多，但二者对分水量的影响需要结合其他条件具体考虑；鉴于当前农业用水效益较低的实际情况，若优先考虑农业用水，则农业用水量大的地区分配水量较多；若不优先考虑农业用水，则工业用水的效益对水分配起主要的影响。

因此可以将此模型用于南水北调工程的水资源优化调配以及其他水资源管理工作中。在应用

时,需按照文中提出的模型假设条件调整有关数据。

在今后的工作中,可以进一步细化模型中的参数,同时用更详实的各个地区各个行业的用水资料,进行更细致的模拟。

### 参考文献 (References)

- [1] 陈烈庭. 华北各区夏季降水年际和年代际变化的地域性特征. 高原气象, 1999, 18 : 477~485  
Chen Lieting. Regional features of interannual and interdecadal variations in summer precipitation anomalies over North China. *Plateau Meteorology* (in Chinese), 1999, 18 : 477~485
- [2] 陆日宇. 华北夏季不同月份降水的年代际变化. 高原气象, 1999, 18 : 509~519  
Lu Riyu. Interdecadal variations of precipitations in various months of summer in North China. *Plateau Meteorology* (in Chinese), 1999, 18 : 509~519
- [3] Wu Renguang, Chen Lieting. Decadal variation of summer rainfall in the Yangtze-Huaihe River valley and its relationship to atmospheric circulation anomalies over East Asia and Western North Pacific. *Adv. Atmos. Sci.*, 1998, 15 : 510~522
- [4] Nitta T, Hu Z Z. Summer climate variability in China and its association with 500 hPa height and tropical convection. *J. Meteor. Soc. Japan*, 1996, 74 : 425~445
- [5] 黄荣辉, 徐予红, 周连童. 我国夏季降水的年代际变化及华北干旱化趋势. 高原气象, 1999, 18 : 465~475  
Huang Ronghui, Xu Yuhong, Zhou Liantong. The interdecadal variation of summer precipitations in China and the drought trend in North China. *Plateau Meteorology* (in Chinese), 1999, 18 : 465~475
- [6] 王先甲. 水资源持续利用的多目标分析方法. 系统工程理论与实践, 2001, (3): 128~135  
Wang Xianjia. Multi-objective analysis method for sustaining water resources utilization. *System Engineering Theory and Practice* (in Chinese), 2001, (3): 128~135
- [7] 李令跃, 甘泓. 试论水资源合理配置和承载能力概念与可持续发展之间的关系. 水科学进展, 2000, 11 (3): 307~313  
Li Lingyue, Gan Hong. Remark on the relationship between water resources rational allocation, carrying capacity and sustainable development. *Advances in Water Science* (in Chinese), 2000, 11 (3): 307~313
- [8] 王劲峰, 刘昌明, 王智勇, 等. 水资源空间配置的边际效益均衡模型. 中国科学 (D辑), 2001, 31 (5): 421~427  
Wang Jinfeng, Liu Changming, Wang Zhiyong, et al. Balanced marginal revenue model of water resource in space allocation. *Science in China* (Ser. D) (in Chinese), 2001, 31 (5): 421~427
- [9] 王智勇, 王劲峰, 于静洁, 等. 河北省平原地区水资源利用的边际效益分析. 地理学报, 2000, 55 (3): 318~328  
Wang Zhiyong, Wang Jinfeng, Yu Jingjie, et al. Analysis on marginal revenues of water in Hebei Province. *Acta Geographica Sinica* (in Chinese), 2000, 55 (3): 318~328
- [10] 刘厚俊. 现代西方经济学原理. 南京: 南京大学出版社, 1998  
Liu Houjun. *Modern Western Economics Theorem* (in Chinese). Nanjing: Nanjing University Press, 1998
- [11] <http://www.data.ac.cn/index.asp>
- [12] <http://www.nsb.gov.cn>