

刘磊, 胡非, 李军, 等. 2013. 基于 Weierstrass-Mandelbrot 函数的分形风速脉动仿真 [J]. 气候与环境研究, 18 (1): 43–50, doi:10.3878/j.issn.1006-9585.2012.11004. Liu Lei, Hu Fei, Li Jun, et al. 2013. On the use of Weierstrass-Mandelbrot function to simulate fractal wind fluctuations [J]. Climatic and Environmental Research (in Chinese), 18 (1): 43–50.

基于 Weierstrass-Mandelbrot 函数的分形 风速脉动仿真

刘磊¹ 胡非¹ 李军¹ 宋丽莉²

1 中国科学院大气物理研究所大气边界层物理和大气化学国家重点实验室, 北京 100029

2 广东省气候中心, 广州 510080

摘 要 实际风速脉动普遍具有自相似分形特征, 而传统的谐波合成法和线性滤波法仿真的风速脉动均不具有自相似分形特征。因此, 基于随机型 Weierstrass-Mandelbrot 函数, 设计了一种能够仿真自相似风速脉动的方案。其中, 表征风速脉动自相似特征的重要参数分形维度可与湍流惯性区能谱的幂指数建立联系。将该方案仿真的风速脉动与实际风速脉动一些重要的统计特征, 如功率谱和概率密度函数等, 进行了比较, 结果表明提出的新方案能有效仿真风速脉动的中高频变化及其概率分布特征。

关键词 风能技术 风速脉动 分形仿真 Weierstrass-Mandelbrot 函数

文章编号 1006-9585 (2013) 01-0043-08

中图分类号 P425.4⁺6

文献标识码 A

doi:10.3878/j.issn.1006-9585.2012.11004

On the Use of Weierstrass-Mandelbrot Function to Simulate Fractal Wind Fluctuations

LIU Lei¹, HU Fei¹, LI Jun¹, and SONG Lili²

1 State Key Laboratory of Atmospheric Boundary Layer Physics and Atmospheric Chemistry, Institute of Atmospheric Physics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100029

2 Guangdong Climate Center, Guangzhou 510080

Abstract Classical methods, such as the harmonic wave superimposing method and the linear filtering method, cannot simulate the universal fractal feature of wind fluctuations. The authors proposed a simple method using the stochastic Weierstrass-Mandelbrot function to simulate wind fluctuations with the fractal feature. The fractal dimension, which is an important parameter that describes the fractal feature of wind fluctuations, can be related to the exponents of the inertial-range spectrum. Simulation results show that the method can effectively simulate the probability distributions and variations of wind fluctuations in the medium-high frequency range.

Keywords wind energy technology, wind fluctuations, fractal simulation, Weierstrass-Mandelbrot function

1 引言

如何设计仿真程度较高, 并且简便和实用的风

速脉动方案, 是风工程和大气环境领域普遍关注的问题 (Jiang et al., 1999; Burton et al., 2001)。例如, 在风能技术领域, 作用在风力发电机上叶片上的载荷通常分为确定载荷和随机载荷两类, 前者由

收稿日期 2011-01-10 收到, 2011-04-22 收到修定稿

资助项目 国家自然科学基金项目 41105005、40775018、90715031

作者简介 刘磊, 男, 1981 年出生, 博士, 主要从事大气边界层物理以及风能模拟和预报技术等研究。Email: liulei@mail.iap.ac.cn

变化缓慢的平均风速产生,后者由叠加在稳定风速上变化较为迅速的风速脉动(即湍流)产生。随机载荷具有较为多样的分析方法,通常分为频域分析和时域分析两类。人们目前已设计出了多种时域分析方法,这些方法均需要仿真的风速脉动时间序列作为输入。因此,时间序列的仿真设计是风力发电机随机载荷分析的重要环节之一。

研究表明,实际风速脉动的时间序列普遍具有自相似分形特征(Lovejoy and Schertzer, 1986; Schmitt et al., 1993; Syu and Kirchhoff, 1993)。自相似分形是风速脉动最为重要的特征之一,它与工程应用中较为关心的诸多风速脉动特征之间具有紧密的联系:其一,根据湍流的级串理论(Frisch, 1995),风速脉动功率谱密度的中高频部分普遍具有幂函数形式,幂指数为 $-5/3$,此特征习惯上称为“ $-5/3$ ”律。风速脉动的自相似特征与“ $-5/3$ ”律有一一对应的关系(West and Schlesinger, 1990)。其二,风速脉动的高频变化往往具有间歇性特征,这种特征会对风能发电量的预报带来困难,也会对风力发电机产生额外载荷(Peinke et al., 2004)。理论分析表明,风速脉动的自相似特征与其间歇性特征之间有紧密的联系(Mandelbrot, 1974)。其三,自相似特征实际上反映了时间序列中的关联特征(Feder, 1988),这对发展风能领域内的各种预报技术有所帮助。

风速脉动时间序列的仿真方法主要有线性滤波法(Mignoler and Spanos, 1987)和谐波合成法(Shinozuka and Jan, 1972)。谐波合成法仿真程度较高,但效率较低,不适用于需要仿真大量空间节点的工程应用中。相反地,线性滤波法效率较高,但其仿真程度相应较低(Rossi et al., 2004)。针对不同的缺点,有作者提出了一些优化方案(李东东和陈陈, 2005; 陈小波等, 2008),其中包括将两种方法相结合使用的方案(Li and Kareem, 1993)。传统的线性滤波法和谐波合成法虽能有效仿真实际风速脉动的功率谱密度,但均未考虑到风速脉动的自相似分形特征。近些年来,人们已经设计出了许多数学模型来仿真具有自相似特征的时间序列,诸如分数布朗运动(Mandelbrot and Van Ness, 1968)、Lévy 飞行(Shlesinger et al., 1993)和 Weierstrass-Mandelbrot 函数(Mandelbrot, 1982)等。

本文探讨了基于 Weierstrass-Mandelbrot 函数的风速脉动时间序列仿真,并将仿真的结果与实际风

速脉动资料进行了对比。研究表明, Weierstrass-Mandelbrot 函数作为一种较为简单,并具有自相似特征的数学模型,能够有效仿真风速脉动时间序列。

2 风速脉动的自相似特征

具有自相似特征的一维物理量 $X(t)$, 通常满足下式(Feder, 1988):

$$X(bt) = b^{2-D} X(t), \quad (1)$$

其中, b 是大于 0 的任意常数, D 通常称为分形维度, 且 $1 < D < 2$ 。如果该物理量具有随机特征, 上式在概率意义下相等, 即:

$$X(bt) \stackrel{d}{=} b^{2-D} X(t), \quad (2)$$

其中, 符号“ $\stackrel{d}{=}$ ”表示等号两边的随机变量其概率密度函数相同。

具有上述自相似特征的物理量 $X(t)$ 通常称为分形。早在 19 世纪末, 人们已经设计了大量具有分形特征的数学函数(Edgar, 2004), 本文将要介绍的 Weierstrass-Mandelbrot 函数即是其中的一种。然而直到 1960 年代, Mandelbrot (1982) 才发现自然界许多现象具有分形特征。这项发现既加深了人们对自然现象的认识, 也推动了许多工程领域新技术的研发和应用。在大气科学领域, 诸多研究表明, 风速脉动普遍具有自相似特征, 其分形维度 D 约为 1.7 (Lovejoy and Schertzer, 1986; Schmitt et al., 1993; Syu and Kirchhoff, 1993), 这些研究构成了风工程中各种分形仿真设计的理论基础。

一般情况下, 通过线性滤波法仿真得到的风速脉动时间序列不具有自相似分形特征。以线性滤波法常用的自回归模型为例,

$$\hat{u}(t) = \sum_{i=1}^n a_i u(t - i\Delta t), \quad (3)$$

其中, $\hat{u}(t)$ 是仿真风速脉动, $u(t)$ 是实测风速脉动, a_i 是与时间无关的常系数, Δt 是最短延迟时间, n 是正整数。因此当 $b \neq 1$ 时,

$$\hat{u}(bt) = \sum_{i=1}^n a_i u(bt - i\Delta t) = b^{2-D} \sum_{i=1}^n a_i u(t - i\frac{\Delta t}{b}) \neq b^{2-D} \hat{u}(t). \quad (4)$$

谐波合成法风速脉动时间序列的数学仿真模型为:

$$\hat{u}(t) = \bar{u} \sum_{i=1}^n (A_i \sin w_i t + B_i \cos w_i t), \quad (5)$$

其中, A_i 和 B_i 均为与时间无关的常随机变量, w_i 是第 i 个成分的频率。根据上式可以证明, 谐波合成法也不具有自相似特征:

$$\hat{u}(bt) = \bar{u} \sum_{i=1}^n (A_i \sin w_i bt + B_i \cos w_i bt) \neq b^{2-D} \hat{u}(t). \quad (6)$$

由上面的讨论可知, 常用的谐波合成法和线性滤波法均不能仿真具有自相似特征的风速脉动时间序列。本文下面将介绍能够仿真自相似时间序列的 Weierstrass-Mandelbrot 函数。

2.1 Weierstrass-Mandelbrot 函数

Weierstrass-Mandelbrot 函数是数学上较为有名的连续不可导函数, 其完全形式为 (Berry and Lewis, 1980):

$$W(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(1 - e^{i\gamma^n t})e^{i\varphi_n}}{\gamma^{(2-D)n}}, \quad (7)$$

其中, $1 < D < 2$, $\gamma > 1$, φ_n 是任意常数。

实际应用中的 Weierstrass-Mandelbrot 函数根据 φ_n 的取值方案分为确定型和随机型两类, 前者已应用于湍流或风速脉动的仿真 (Humphrey et al., 1992; 刘罡等, 1998)。本节将详细讨论确定型 Weierstrass-Mandelbrot 函数在仿真中的局限性, 并引入随机型的 Weierstrass-Mandelbrot 函数来仿真风

速脉动时间序列。

2.2 确定型 Weierstrass-Mandelbrot 函数

确定型 Weierstrass-Mandelbrot 函数的形式为:

$$D(t) = -\text{Im} W(t)|_{\varphi_n=0} = A \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin \gamma^n t}{\gamma^{(2-D)n}}, \quad (8)$$

其中, 引入常数 A 确保仿真序列的功率谱可与实测功率谱拟合。函数 $D(t)$ 具有以下性质:

(1) 自相似性, 分形维度为 D :

$$D(bt) = b^{2-D} D(t). \quad (9)$$

(2) 当 $\gamma \rightarrow 1$ 时, 按频率平均后的功率谱密度具有幂函数形式:

$$\overline{S(f)} = \frac{1}{2\Delta f} \int_{-\Delta f}^{\Delta f} S(f + f') df' = \frac{\pi A^2}{\ln \gamma (2\pi f)^{5-2D}}, \quad (10)$$

因此, 确定型 Weierstrass-Mandelbrot 函数只能仿真湍流风速脉动的惯性区的周期成分。

(3) $D(t)$ 的振幅具有随时间的增加呈幂次递增的趋势 (图 1a, 取 $A=1$, $\gamma=1.1$, $D=1.7$, 图 1b 和 1c 也选取上述参数值), 这是由 (8) 式中较小频率的谐波振幅造成的 (Berry and Lewis, 1980)。因此, 在风速脉动时间序列的仿真中, 人们多采用低频截断的形式:

$$D(t) = A \sum_{n=n_{\min}}^{\infty} \frac{\sin \gamma^n t}{\gamma^{(2-D)n}}. \quad (11)$$

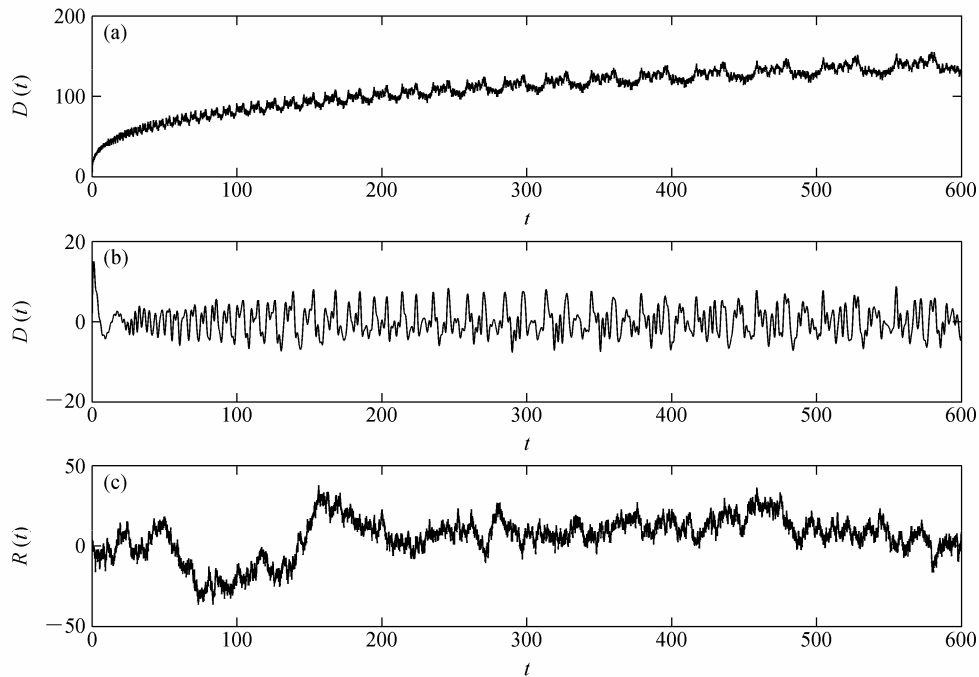


图 1 几类 Weierstrass-Mandelbrot 函数的比较: (a) 确定型; (b) 低频截断的确定型; (c) 随机型

Fig. 1 Comparison of Weierstrass-Mandelbrot functions: (a) Deterministic function; (b) deterministic function with low frequency variations truncated; (c) stochastic function

低频截断的 Weierstrass-Mandelbrot 函数不具有明显的递增趋势 (图 1b, 取 $n_{\min} = -10$), 与未做低频截断的 Weierstrass-Mandelbrot 函数相比, 具有许多新的特性: 其一, 其功率谱密度在低频区 $f_{\min} = \gamma^{n_{\min}} / 2\pi$ 处出现截断。因此, γ 和 $n_{\min}$ 的选择应该保证 $f_{\min}$ 大于湍流惯性区的最低频率。其二, 低频截断型的 Weierstrass-Mandelbrot 函数类似于谐波合成法, 不具有自相似特征。

2.3 随机型 Weierstrass-Mandelbrot 函数

随机型 Weierstrass-Mandelbrot 函数的形式为:

$$R(t) = \operatorname{Re} W(t) \\ = A \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{\cos \varphi_n - \cos \varphi_n \cos \gamma^n t}{\gamma^{(2-D)n}} + \frac{\sin \varphi_n \sin \gamma^n t}{\gamma^{(2-D)n}} \right], \quad (12)$$

其中, φ_n 是定义在 $[0, 2\pi]$ 上的均匀分布。函数 $R(t)$ 具有以下性质:

(1) 随机自相似性, 分形维度为 D :

$$R(bt) = b^{2-D} R(t). \quad (13)$$

(2) 当 $\gamma \rightarrow 1$ 时, 按频率平均后的功率谱密度同样具有幂函数形式:

$$\overline{S(f)} = \frac{\pi A^2}{2 \ln \gamma (2\pi f)^{5-2D}}. \quad (14)$$

(3) $R(t)$ 样本的振幅并没有明显的变化趋势, 如图 1c 所示。

由上面讨论可知, 常用的确定型 Weierstrass-Mandelbrot 函数因为在低频段有截断, 从而失去了原有的自相似特征。随机 Weierstrass-Mandelbrot 函数的样本振幅既无明显的变化趋势, 又具有自相似特征, 因而本文将使用随机型 Weierstrass-Mandelbrot 函数来仿真风速脉动。

3 风速脉动的仿真步骤

基于随机型 Weierstrass-Mandelbrot 函数风速脉动仿真的具体步骤如下:

第一步: 选取合适的求和项数。尽管自相似的 Weierstrass-Mandelbrot 函数具有无穷项求和, 在实际应用中只能选取有限的求和项数来近似逼近该函数。求和项数的选取要求足够大, 使得仿真序列逼近原始函数的自相似特征。此外, 求和项数又不可能无限制增加, 从而降低了仿真效率。本文随机选取了若干组 γ 的取值, 分析了确定型 Weierstrass-Mandelbrot 函数随求和项的变化。研究表明, γ 值

越小, 所需的求和项数越多。当 $\gamma \geq 1.1$ 时, n 的最大取值大于 50, 且 n 的最小取值小于 -160 时, 仿真时间序列之间的相对差别小于 0.5%, 因此本文建议 n 的最大取值取为 50, 最小取值取为 -160。

第二步: 选取合适的 γ 值。根据随机 Weierstrass-Mandelbrot 函数的性质 2, γ 值越小, 仿真时间序列的功率谱密度越光滑, 并接近于 (14) 式, 本文推荐选用 $1.1 \leq \gamma \leq 1.3$ 之间的值。

第三步: 根据目标功率谱密度确定其它参数。Kaimal 谱是工程上常用的目标功率谱密度, 其形式为 (Kaimal and Finnigan, 1994):

$$\begin{cases} \frac{f S_u(f)}{u_*^2} = \frac{102n}{(1+33n)^{5/3}}, \\ \frac{f S_v(f)}{u_*^2} = \frac{17n}{(1+9.5n)^{5/3}}, \\ \frac{f S_w(f)}{u_*^2} = \frac{2.1n}{1+5.3n^{5/3}}, \end{cases} \quad (15)$$

其中, u_* 是摩擦速度, $n = fz/\bar{u}$ 是归一化频率, $\bar{u}$ 是平均风速, u 、 v 和 w 分别是径向 (垂直于风力发电机转子平面)、侧向 (水平方向平行于风力发电机转子平面) 和垂直方向 (垂直方向平行于风力发电机转子平面) 的风速。实际上, 谱的具体形式与局地大气和地形条件密切相关, 往往不能用统一的形式来描述。尽管如此, 在中高频区 (惯性副区) 能谱仍保持 “-5/3” 幂次谱的特征 (刘树华等, 1996)。为了得到目标功率谱的具体形式, 本文利用带参数的 Kaimal 谱来拟合实测风速资料:

$$S(f) = \frac{\alpha z}{\bar{u}(1+\beta n)^{5/3}}, \quad (16)$$

其中, α 和 β 是待拟合参数, α 的量纲为 $\text{m}^2 \text{s}^{-2}$, β 是无量纲参数。

风速脉动谱在高频区往往具有幂函数的形式, 称为惯性区:

$$S(f) = \frac{\alpha}{\beta^{5/3}} \left(\frac{\bar{u}}{z} \right)^{\frac{2}{3}} f^{-5/3}. \quad (17)$$

将上式与 (16) 式进行对比, 可知:

$$\begin{cases} D = \frac{5}{3} \approx 1.7, \\ A \approx \sqrt{12.04 \alpha \beta^{-\frac{5}{3}} \left(\frac{\bar{u}}{z} \right)^{\frac{2}{3}} \ln \gamma}. \end{cases} \quad (18)$$

第四步: 将各参数带入随机 Weierstrass-Man-

delbrot 函数 $R(t)$, 即可得到风速脉动的仿真时间序列。

4 仿真结果及分析

本文所用的观测资料由国家气候中心风能资源详查和评价项目所属的草原下垫面边界层梯度观测试验提供。试验场地位于锡林浩特市东北约 30 km 处, 具有较为均匀和平坦的草原下垫面。试验设立了 3 座气象观测塔 (一座 100 m 高, 两座 70 m 高)。本文所用湍流风速资料来自 100 m 塔上配备的 CSAT-3 型超声风速仪, 观测高度 30 m, 采样频率 20 Hz, 观测时间为 2009 年 7 月 10 日至 7 月 22 日。

首先, 从观测资料中挑选 10 min 平均风速约为 10 m s^{-1} 的风速脉动时间序列, 计算其功率谱密度, 并用 (16) 式拟合该实测功率谱密度, 表 1 是拟合结果。图 2 中的散点是实测功率谱, 虚线是拟合得到的功率谱。由图 2 可知, 除高频区之外, 实测功率谱密度与 (16) 式拟合较好。由于观测信号中混入的高频白噪声及混叠效应的影响, 实测功率谱在高频段往往偏离幂函数, 具有上翘的趋势 (Kaimal and Finnigan, 1994)。取 n 为 $[-160, 50]$ 内所有的整数, $\gamma=1.1$, $T=600 \text{ s}$, 并将表 1 中拟合得到的参数值代入 (18) 式, 求出参数 A 的值。将

n 、 γ 和 A 的值代入随机 Weierstrass-Mandelbrot 函数中, 即可得到风速脉动的仿真时间序列。图 3、4 和 5 分别是径向、侧向和垂直方向的实测风速脉动与仿真风速脉动时间序列的比较, 两者之间较为相似。

表 1 风速脉动功率谱密度的拟合结果

Table 1 Fitting results of power spectral density of wind fluctuations

	$\alpha/(\text{m}^2 \text{s}^{-2})$	β
径向	48.0095	65.5531
侧向	64.2057	84.3882
垂直方向	3.4201	14.6748

为了定量地评估仿真效果, 下面将比较实测风速脉动和仿真风速脉动时间序列的功率谱密度和概率密度函数。图 2 是功率谱密度的比较结果, 其中虚线是根据 (16) 式拟合得到的目标功率谱。由图 2 可知, 随机型 Weierstrass-Mandelbrot 函数能有效仿真实测风速脉动的中高频变化, 但其低频变化的强度比实测风速脉动高。从图 3、4 和 5 也能明显看出仿真时间序列中含有强度较大的低频变化。图 6 是概率密度函数的比较结果, 可知利用随机型 Weierstrass-Mandelbrot 函数得到的仿真风速脉动时间序列与实测风速具有相似的概率分布特征, 即高斯型分布特征。

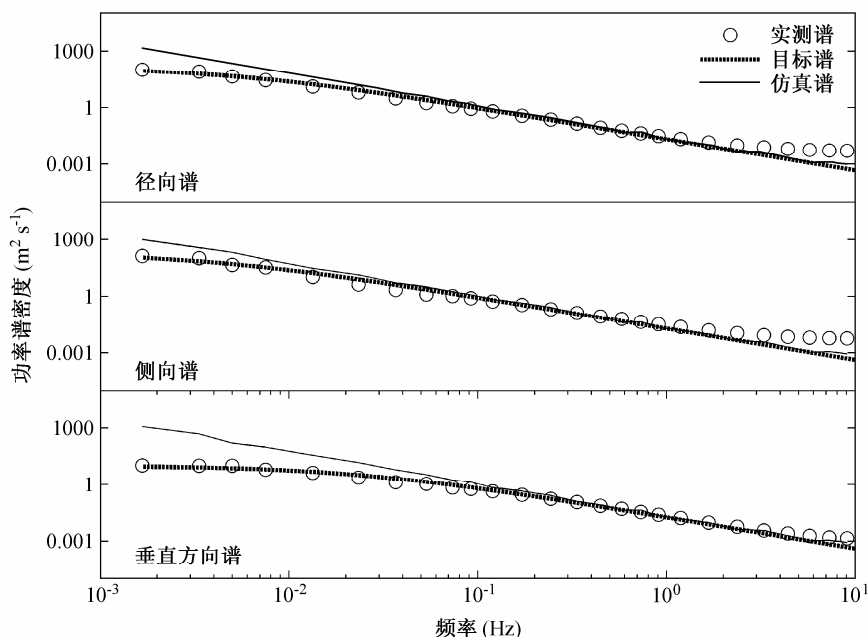


图 2 实测功率谱密度和仿真功率谱密度的比较

Fig. 2 Comparisons between measured and simulated power spectral density functions

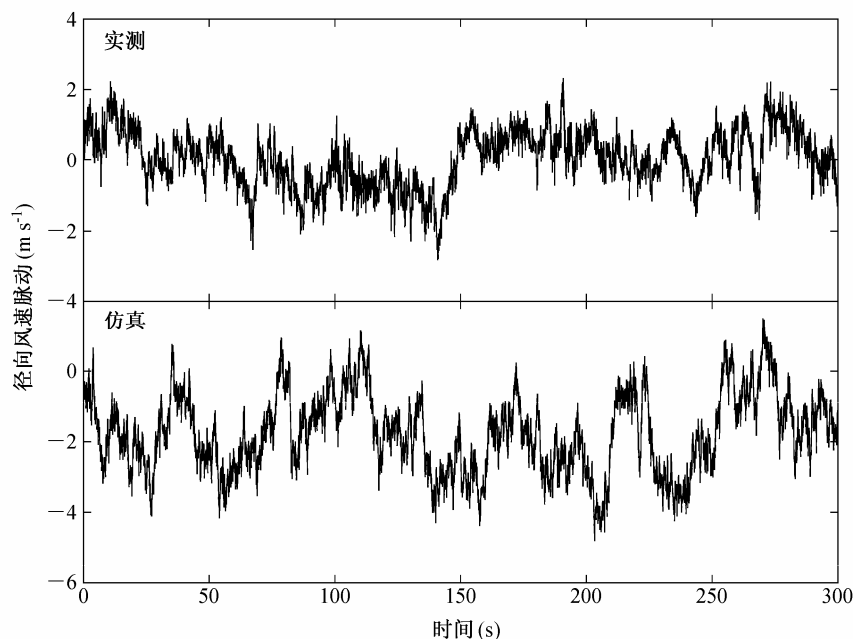


图3 实测径向风速脉动和仿真风速脉动的时间序列

Fig. 3 Comparison between the time series of measured and simulated radial wind fluctuations

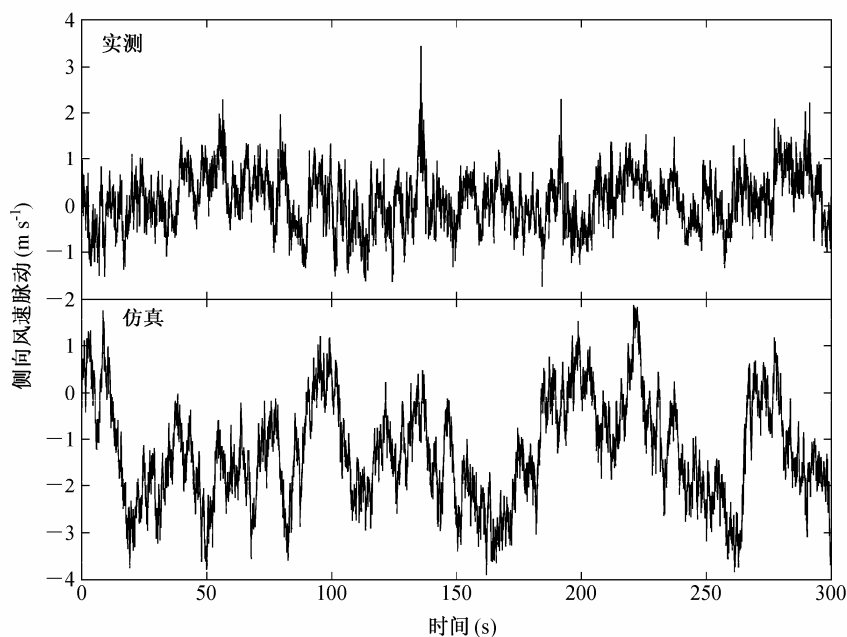


图4 实测侧向风速脉动和仿真风速脉动的时间序列

Fig. 4 Comparison between the time series of measured and simulated lateral wind fluctuations

综上所述,随机型 Weierstrass-Mandelbrot 函数虽然是一种简单的自相似函数,却能有效地仿真实际风速脉动的中高频变化及其概率分布特征。

5 结语

风速脉动的仿真是风力发电机随机载荷分析

和设计中的关键环节之一。本文基于随机型的 Weierstrass-Mandelbrot 函数,对风速脉动进行了分形仿真研究,主要结论如下:

(1) 实际风速脉动普遍具有自相似分形特征,而传统的谐波合成法和线性滤波法仿真的风速脉动均不具有自相似分形特征。

(2) 确定型 Weierstrass-Mandelbrot 函数作为一

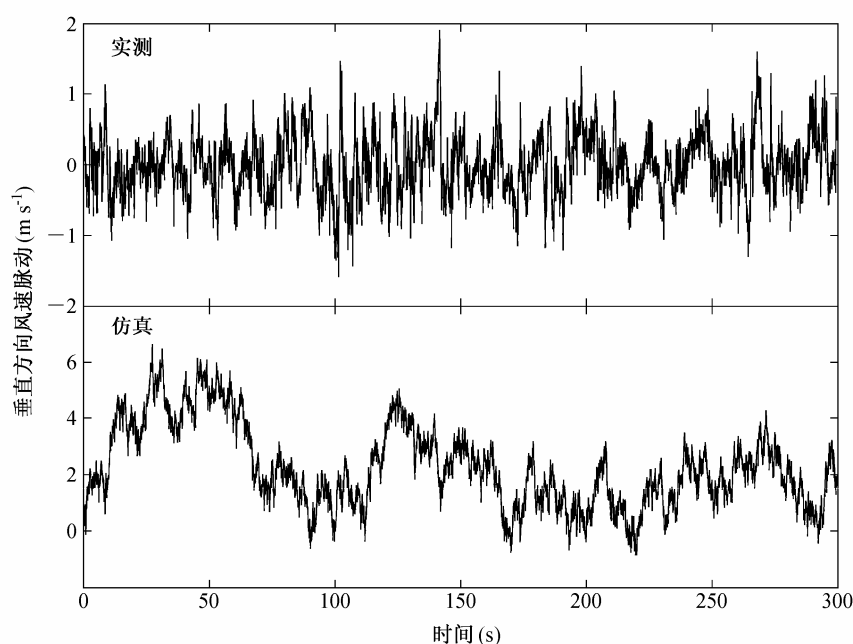


图5 实测垂直方向风速脉动和仿真风速脉动的时间序列

Fig. 5 Comparison between the time series of measured and simulated vertical wind fluctuations

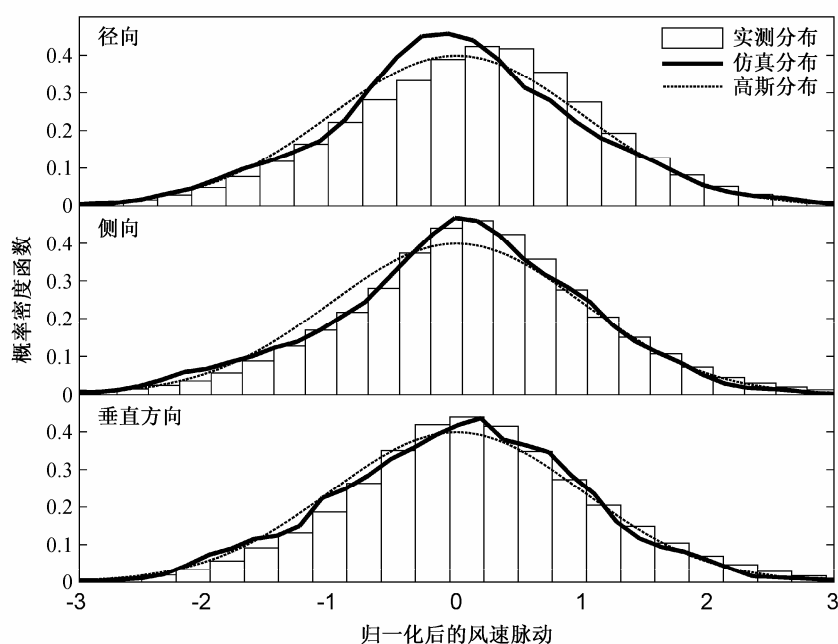


图6 实测概率密度函数和仿真概率密度函数的比较

Fig. 6 Comparisons between measured and simulated probability density functions

种简单的具有自相似特征的函数，常用来仿真具有自相似特征的时间序列。研究表明，确定型 Weierstrass-Mandelbrot 函数的振幅具有随时间的增加呈幂次递增的趋势，不适合用来仿真风速脉动的时间序列。

(3) 随机型 Weierstrass-Mandelbrot 函数的振幅并没有明显的递增或递减的趋势，与实际风速脉动的变化较为相似。本文的统计分析表明，随机型

Weierstrass-Mandelbrot 函数能简单、有效地仿真实测风速脉动的中高频变化。

(4) 随机型 Weierstrass-Mandelbrot 函数仿真的风速脉动时间序列与实测风速脉动相比，含有较强的低频变化，这是本方案的不足之处，尚待以后的研究工作予以改进。

致谢 本文中的实验数据由中国气象局国家气候中心提供，

作者在此表示衷心的感谢。

参考文献 (References)

- Berry M V, Lewis Z V. 1980. On the Weierstrass-Mandelbrot fractal function [J]. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Science*, 370: 459–484.
- Burton T, Sharpe D, Jenkins N, et al. 2001. *Wind Energy Handbook* [M]. Chichester: Wiley, 239–252.
- 陈小波, 陈健云, 李静. 2008. 海上风力发电塔脉动风速时程数值模拟 [J]. *中国电机工程学报*, 28 (32): 111–116. Chen Xiaobo, Chen Jianyun, Li Jing. 2008. Numerical simulation of fluctuating wind velocity time series of offshore wind turbine [J]. *Proceedings of the CSEE (in Chinese)*, 28 (32): 111–116.
- Edgar G A. 2004. *Classics on Fractals* [M]. Boulder: Westview Press, 384pp.
- Feder J. 1988. *Fractals* [M]. New York: Plenum, 149–162.
- Frisch U. 1995. *Turbulence: the Legacy of A. N. Kolmogorov* [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 312pp.
- Humphrey J A C, Schuler C A, Rubinsky B. 1992. On the use of the Weierstrass-Mandelbrot function to describe the fractal component of turbulent velocity [J]. *Fluid Dynamics Research*, 9: 81–95.
- Jiang W M, Yu H B, Li X. 1999. Random walk modeling of wake dispersion for the exhaust tower of an underground tunnel in urban area [J]. *Journal of Environmental Sciences*, 11 (4): 474–479.
- Kaimal J C, Finnigan J J. 1994. *Atmospheric Boundary Layer Flows: Their Structures and Measurement* [M]. New York: Oxford University Press, 304pp.
- 李东东, 陈陈. 2005. 风力发电系统动态仿真的风速模型 [J]. *中国电机工程学报*, 25 (21): 41–44. Li Dongdong, Chen Chen. 2005. Wind speed model for dynamic simulation of wind power generation system [J]. *Proceedings of the CSEE (in Chinese)*, 25 (21): 41–44.
- Li Y, Kareem A. 1993. Simulation of multivariate random processes: Hybrid DFT and digital filtering approach [J]. *Journal of Engineering Mechanics*, 119 (5): 1078–1098.
- 刘罡, 李昕, 胡非. 1998. 大气边界层风速脉动的分形模拟 [J]. *气候与环境研究*, 3 (3): 260–265. Liu Gang, Li Xin, Hu Fei. 1998. Fractal representation of wind speed fluctuation in atmospheric boundary layer [J]. *Climatic and Environmental Research (in Chinese)*, 3 (3): 260–265.
- 刘树华, 刘和平, 洪钟祥, 等. 1996. 我国草原下垫面低层大气湍流结构 [J]. *大气科学*, 20 (3): 378–383. Liu Shuhua, Liu Heping, Hong Zhongxiang, et al. 1996. The turbulence structure in the near-surface atmospheric layer over the Horqin Grassland [J]. *Scientia Atmospherica Sinica (in Chinese)*, 20 (3): 378–383.
- Lovejoy S, Schertzer D. 1986. Scale invariance, symmetries, fractals, and stochastic simulations of atmospheric phenomena [J]. *Bull. Amer. Meteor. Soc.*, 67 (1): 21–32.
- Mandelbrot B B. 1974. Intermittent turbulence in self-similar cascades divergence of high moments and dimension of the carrier [J]. *J. Fluid Mech.*, 62: 331–358.
- Mandelbrot B B. 1982. *The Fractal Geometry of Nature* [M]. New York: W. H. Freeman, 468pp.
- Mandelbrot B B, Van Ness J W. 1968. Fractional Brownian motions, fractional noises and applications [J]. *SIAM Review*, 10 (4): 422–437.
- Mignoler P M, Spanos P D. 1987. Recursive simulation of stationary multivariate random processes—Part I [J]. *Journal of Applied Mechanics*, 54: 674–680.
- Peinke J, Barth S, Böttcher F, et al. 2004. Turbulence, a challenging problem for wind energy [J]. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 338: 187–193.
- Rossi R, Lazzari M, Vitaliani R. 2004. Wind field simulation for structure engineering purpose [J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 61: 738–763.
- Schmitt F, Schertzer D, Lovejoy S, et al. 1993. Estimation of universal for atmospheric turbulent multifractal indices for atmospheric turbulent velocity fields [J]. *Fractals*, 1 (3): 568–575.
- Shinozuka M, Jan C M. 1972. Digital simulation of random processes and its applications [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 25: 111–128.
- Shlesinger M F, Zaslavsky G M, Klafter J. 1993. Strange kinetics [J]. *Nature*, 363: 31–37.
- Syu C Y, Kirchhoff R H. 1993. The fractal dimension of the wind [J]. *Journal of Solar Energy Engineering*, 115 (3): 151–154.
- West B J, Shlesinger M. 1990. The noise in natural phenomena [J]. *American Scientist*, 78 (1): 40–45.