

王鹏飞, 毕淑婷. 2016. 集合平均方法减小混沌系统计算误差的效果研究 [J]. 气候与环境研究, 21 (5): 557–566. Wang Pengfei, Bi Shuting. 2016. Study on the ensemble mean method in reducing the numerical error in chaotic dynamical system [J]. Climatic and Environmental Research (in Chinese), 21 (5): 557–566, doi: 10.3878/j.issn.1006-9585.2016.16003.

# 集合平均方法减小混沌系统计算误差的效果研究

王鹏飞<sup>1,2</sup> 毕淑婷<sup>3,1</sup>

1 中国科学院大气物理研究所季风系统研究中心, 北京 100190

2 中国科学院大气物理研究所大气科学和地球流体力学数值模拟国家重点实验室, 北京 100029

3 中国科学院大学, 北京 100049

**摘要** 研究了 Lorenz 非线性系统中使用的集合平均方法来减小计算误差的效果, 通过检查 5 组数值试验 (每组 20 个样本) 的结果发现: 集合平均对计算误差的减小和消除不如高精度算法有效, 这主要体现在以下几方面: 1) 普通的算法和双精度的计算环境中, 若截断误差是主导误差 (当初值误差很小时), 各集合的平均结果并不收敛于真值, 而是收敛于含截断误差的数值解; 2) 若初值误差为主导时, 系统受到初值误差增长规律的影响, 数值解收敛于由初值误差主导的误差解; 3) 这两种误差量级接近的时候, 两种误差都无法消除掉。对解的统计特征进行研究表明, 可信的数值解与含计算误差的数值解有许多相似的地方, 但是与集合平均的数值解有很大不同, 同样说明了集合平均不适用于减小计算误差这样的问题。此外, 试验结果表明即使数值解的概率分布形式基本正确, 也不能保证数值解是正确的。

**关键词** 集合平均 计算误差 统计特征 Lyapunov 指数

文章编号 1006-9585 (2016) 05-0557-10

中图分类号 P456

文献标识码 A

doi:10.3878/j.issn.1006-9585.2016.16003

## Study on the Ensemble Mean Method in Reducing the Numerical Error in Chaotic Dynamical System

WANG Pengfei<sup>1,2</sup> and BI Shuting<sup>3,1</sup>

1 Center for Monsoon System Research, Institute of Atmospheric Physics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190

2 State Key Laboratory of Numerical Modeling for Atmospheric Sciences and Geophysical Fluid Dynamics, Institute of Atmospheric Physics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100029

3 University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049

**Abstract** Five groups (each includes 20 samples) of numerical experiments are implemented and the solutions are compared with reliable solutions of the Lorenz chaotic system. Results indicate that the ensemble mean method is not as good as the high precision scheme in reducing the numerical error. 1) When a general scheme and double-precision are used in computing, the truncation error will be dominant, and the ensemble mean solution will not converge to the real solution but approach to a solution with the truncation error. 2) When the initial error is dominant compared to the truncation error, the error will increase exponentially, and the solution will converge to an error-induced solution that is mainly affected by the initial error. 3) When the initial error and the truncation error are comparable, neither of them can be eliminated. The probability density function (PDF) of the numerical solutions is also analyzed for the ensemble mean

收稿日期 2016-01-05; 网络预发表日期 2016-03-25

作者简介 王鹏飞, 男, 1973 年出生, 博士, 高级工程师, 主要从事数值模式、并行计算、非线性动力学等方面的研究。E-mail: wpf@mail.iap.ac.cn

项目资助 国家自然科学基金资助项目 41375112、41530426, 中国科学院“关键技术人才”项目

Funded by National Natural Sciences Foundation of China (Grants 41375112 and 41530426), Key Technology Talent Program, Chinese Academy of Sciences

dynamical system. Results indicate that the PDF is significantly different to that in the original system. This difference further indicates that the ensemble mean method cannot yield a true numerical solution. The PDF study also suggests that a correct PDF distribution of the numerical solution cannot guarantee a correct solution.

**Keywords** Ensemble mean, Computation error, Statistical property, Lyapunov exponent

## 1 引言

大气科学中的集合预报经历了随机动力预报、Monte-Carlo 预报、滞后平均预报等几个阶段,逐步发展到目前的业务化的集合预报和多模式集合预报。为预报大气模式不确定性, Epstein (1969) 首次明确地引入了随机动力预报的概念,通过一个多维动力模型,求得模式解的概率密度所满足的动力方程,为了简化运算, Epstein 引入了一个近似,只预报概率分布的一阶矩和二阶矩(即均值和方差)。Epstein 对 Lorenz 方程试验了这样的近似随机方程,通过 500 个样本的计算,得出了集合预报对几天之内的预报效果有改进的结论。Leith (1974) 提出了利用  $n$  个成员来制作集合预报的方法,他在分析时用偏差场取代了模式变量,发现如果使用 Monte-Carlo 方法 (MCF) 产生的偏差场,集合平均之后可以使预报结果缓慢地接近气候值,而且不需要进行回归运算,这样就可以用相对较少的集合数来完成预报。Hoffman and Kalnay (1983) 提出了使用滞后平均预报 (Lagged Average Forecasting, LAF) 代替 Monte-Carlo 预报的方案,除了取  $t=0$  时刻的样本值外,还用其它的一些等间隔时刻的样本参与运算,从而有一些实况的信息被后面的分析所利用,结果表明 LAF 相比 Monte-Carlo 预报而言,预报技巧有明显优势。

经过很多研究,现在集合预报已经有了成熟的业务化预报方法,如:繁殖法 (Toth and Kalnay, 1993)、奇异向量法 (Palmer et al., 1993; Molteni et al., 1996)、资料同化法 (Houtekamer et al., 1996)、多系统集合法 (Kalnay and Ham, 1989; Fritsch et al., 2000) 等。集合预报的应用范围也很广,除了天气预报外还包括月、季、年际的预报, ENSO 事件的预报。此外,它还被用于其他一些气候变化问题的研究(蔡其发等, 1999; 姜智娜等, 2008; 郑飞等, 2009; 康红文等, 2012)。近年来,基于集合同化思想的集合预报初始扰动生成方法也有了很大的发展,如集合卡尔曼滤波 (Ensemble Kalman Filter,

EnKF)、集合变换卡尔曼滤波 (Ensemble Transform Kalman Filter, ETKF) 方法等 (Evensen and Van Leeuwen, 1996; 田伟红和庄世宇, 2007), 试验表明这些方法得到的初始扰动可以改进数值预报的结果。

集合平均是集合预报最常用的方案之一,其数学基础是 Monte-Carlo 数值试验,每一个积分过程都可视为非平衡统计物理中的准粒子轨迹,从而使用大量积分来研究其概率密度分布(封国林和董文杰, 2003), 实际业务中也计算集合预报中的多种统计量,如均值、方差、概率密度分布等。以往的集合平均预报多从随机动力预报出发,着重研究集合预报的天气预报实现方法和具体应用,而它能否用于减小混沌系统的预报误差受到了学者的关注。Houtekamer and Derome (1994, 1995) 在分析两样本的集合预报时使用了三变量的 Lorenz63 系统,研究表明控制试验和两样本初值扰动的平均预报本质上的区别源于非线性作用,因此,必须用非线性的模型才能检测出集合平均预报的效果。Anderson (1997) 使用了两个低阶的模型对比非线性系统中约束型集合预报和非约束型集合预报的效果,结果表明非约束的集合预报可以取得与设定约束条件的集合预报相当的效果。王鹏飞等 (2014) 从原始的非线性方程初值平均问题出发,把它对应的均值方程系统及样本初值联合看作一个广义的微分动力系统,应用定性理论分析此均值系统长期的动力学行为和性质,进而研究均值系统吸引子的结构,增加了对集合平均的本质和变化规律的认识。

集合预报在大气科学研究中的主要作用之一是减小误差,但它能否用于减小混沌系统的计算误差仍是值得研究的问题。在普通的浮点计算环境中,双精度计算和差分方法(如 4 阶 Runge-Kutta 格式)的算法程序是常用的数值研究手段,但是结果中必然存在一定的计算误差(由截断误差和舍入误差组成)。这就引出了如下的问题: 1) 通过初值的集合平均能否对此计算误差进行有效的消除或减小? 2) 如果能消除或减小计算误差,那么它们的效果能否与以前研究中使用的高精度算法效果

相当? 3) 集合平均解能否保持原问题的统计特征? 为了回答这些问题, 本文用精确的参考解来评估 20 个扰动样本的普通数值解的算术集合平均对计算误差的影响; 进一步分离这些解中的初值误差、截断误差和舍入误差, 研究它们分别做集合平均后随时间的变化; 分析可信数值解和含计算误差的数值解的统计特征的异同, 并给出计算误差不能用集合平均方法消除的原因。

## 2 计算误差和有效计算时间的基本理论

在 Henrici 的工作基础上, Li et al.(2000, 2001) 得到了常微分方程一般  $k$  步算法的总误差界公式如下 (总计算误差记为:  $E = e + r$ ):

$$\begin{aligned} \|E(t; h)\| &= \|e(t; h)\| + \|r(t; h)\| \leq C(t)\tilde{E}(h, K) \\ &= C(t) \left( Ch^p + \frac{\sigma}{\tilde{C}\sqrt{h}} \right), \end{aligned} \quad (1)$$

其中,  $t$  为无量纲时间,  $h$  是时间步长,  $C(t) = e^{C_L \Gamma(t-t_0)} / \sqrt{C_L}$ ,  $\tilde{E}(h, K) = \tilde{e} + \tilde{r}$  为误差的主体部分 ( $\tilde{e} = Ch^p$ ,  $\tilde{r} = \sigma / \tilde{C}\sqrt{h}$ ),  $C$  是依赖于算法的常数,  $C_L$  是依赖于常微分方程 (Ordinary Differential Equation, ODE) 的常数,  $\tilde{C} = \sqrt{2C_L}$ ,  $p$  是算法的阶数,  $\sigma = 10^{-n} M_0$ ,  $M_0 = \max_{\tau \in [t_0, t]} \|y(\tau)\| / \sqrt{2\sqrt{3}}$ ,  $K$  为浮点计算的有效位数 (10 进制), 各参数的具体说明请参考 Li et al. (2001)。

Lorenz 通过定性分析和数值试验指出一个确定的非线性动力系统可以有非常复杂的解 (Lorenz, 1963), 他所使用的 Lorenz63 方程被广泛用于混沌和可预报性方面的研究, 方程可以写为:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -\sigma x + \sigma y, \\ \frac{dy}{dt} = rx - y - xz, \\ \frac{dz}{dt} = xy - bz, \end{cases} \quad (2)$$

其中,  $\sigma$ 、 $r$ 、 $b$  为无量纲常数 (本文中取参数  $\sigma = 10$ ,  $r = 28.0$ ,  $b = 8/3$ )。  $x$ 、 $y$ 、 $z$  的初值选为  $-15.8$ 、 $-17.48$ 、 $35.64$ 。

Liao (2009) 对上述 Lorenz 方程计算得到了 3 个统计关系:

$$T_c \approx 3p, \quad (3)$$

$$T_c \approx 2.51K - 4.26, \quad (4)$$

$$T_c \approx -2.5 \lg \Delta x_0, \quad (5)$$

则分别表示了可信计算时间  $T$  同算法阶数 ( $p$ )、 $K$  和初值误差 ( $\Delta x_0$ ) 的简单线性关系。

实际上 Liao (2009) 所得的统计关系是 Li et al. (2001) 结果的特例, 当考虑误差限  $\delta$  的作用时, 根据公式

$$T_c(h) = -\frac{\ln h}{C_L \Gamma^*} p + \frac{1}{C_L \Gamma^*} \ln \left( \frac{\delta \sqrt{C_L}}{C} \right), \quad (6)$$

取  $h = 0.01$  即得

$$T_c(0.01) = \frac{4.6}{C_L \Gamma^*} p + \frac{1}{C_L \Gamma^*} \ln \left( \frac{\delta \sqrt{C_L}}{C} \right). \quad (7)$$

再根据公式:

$$T_c(h) = \frac{\ln 10}{C_L \tilde{\Gamma}^*} K + \frac{1}{C_L \tilde{\Gamma}^*} \ln \left( \frac{\tilde{C} \delta \sqrt{C_L h}}{M_0} \right), \quad (8)$$

取  $h = 0.01$  即得

$$T_c(0.01) = \frac{2.3}{C_L \tilde{\Gamma}^*} K + \frac{1}{C_L \tilde{\Gamma}^*} \ln \left( \frac{\tilde{C} \delta \sqrt{C_L}}{10 M_0} \right). \quad (9)$$

此外不难得到  $T_c$  随初值的变化公式:

$$T_c = -\frac{2.3}{kL\Gamma^*} \lg \Delta x_0 + \frac{2.3}{kL\Gamma^*} \lg \frac{\delta}{N_1(\eta)}. \quad (10)$$

如果需要获得  $T_c = 100$  LTU (Lorenz 系统时间, Lorenz Time Unit) 时, 具有 16 位有效数字的数值解 (平均而言  $\delta \approx 10^{-16}$ ), 可以根据公式 (3) 和公式 (4) 估算出所需的算法阶数和有效位数, 实际计算时选用的值比上面理论推导出的数值再大一些, 以保证计算的精确。本文中试验的阶数取为 50, 二进制的位数取为 250 位 (约相当于 75 位十进制有效数字), 能够保证参考解输出中的 16 位有效数字。

## 3 集合平均对计算误差影响的试验研究

### 3.1 试验工具

可信计算时间 (记作  $T_c$ ) 的存在说明在目前常用的计算机系统中要获得  $t = 1000$  时正确的数值解仅使用单精度和双精度计算是不够的。为了解决浮点计算精度不够用的问题, 计算机应用领域有一套成熟的软件库 “MP” (multiple precision) (Brent, 1978; Portilho, 1990) 可供使用。利用 MP, 对于固定的计算步长  $h$  总可以选择充分高的计算精度以确保舍入误差的积累相对于截断误差的积累是可以忽略的, 这样总的计算误差就由截断误差主导。

Wang et al. (2006)、Liao (2009) 展示了将多精度计算工具用于求解洛伦兹方程的方法，这些工作已经证明了增加浮点计算精度对获取可信的数值解是非常有价值的。

控制截断误差的有效方法是使用高阶算法，例如求解常微分方程 (ODEs) 的 Taylor 方法，它的优点是很容易实现较高的算法阶数，利用 Moore (1966, 1979) 提出的递归计算泰勒系数的方法，Barrio (2005) 研究了使用 Taylor 算法对 ODEs 的一般计算问题，并且分析了算法的收敛域特点。Liao (2009) 中提出“纯净计算”的方法 (Clean Numerical Simulation, CNS)，采用 400 阶 Taylor 级数和 800 有效位高精度数据，应用 Mathematica 软件获得了 1200 LTU 的结果。Barrio et al. (2011) 使用高阶的 Taylor 系数法，对 Lorenz 方程、Kepler 问题、Henon-Heiles 问题 (Hénon and Heiles, 1964) 进行了研究，结果表明，对指定的  $t$  时刻，这些方法可以获得精度非常高的数值解。

获得混沌系统长时间数值解的方法不仅依赖于计算的步长、算法阶数和浮点计算精度，而且还受制于实际消耗的计算时间。Wang et al. (2012) 比较了 RK4 方法和 Taylor 高阶算法在计算时间上的花费，结果表明：高阶算法能够将求解 Lorenz 方程的时间按指数比率降低，因此比使用最优步长计算的阶数算法更具效率。然而，高阶的 Taylor 算法在使用很高的浮点精度时非常耗费计算机 CPU 时间，而过长的计算时间会限制此类算法的推广和应用。为此，Wang et al. (2012) 提出了使用并行计算来加快计算速度的方案“并行多精度泰勒算法” (Parallel Multiple-precision Taylor scheme, PMT)。在算法 1.0 版的基础上，Wang et al. (2014) 改进了递归系数的计算，使计算速度再次提升，并且将其拓展求解多个混沌动力系统。利用此并行版本模式 Liao and Wang (2014) 给出了 Lorenz 系统 [0, 10000] LTU 的可信数值解，得到了混沌系统可以获得收敛数值解的正面结论，目前此并行 Taylor 算法已成功运用于天河一号等并行计算机系统中，获得了很高的加速比和计算效率，本文的数值试验即采用此并行版的模式完成。

### 3.2 试验方案

本文的集合数值试验共 5 组，每组 20 个样本，集合样本用  $|E_0| \approx 10^{-7}$  附近的 20 个初值，具体的说明如下：

A 组试验在计算步长 0.01、阶数  $p=50$ 、计算精度  $P_r=250$  的条件下得到  $t=0 \sim 100$  时刻的计算值，作为参考解；其中 0 号样本 ( $E_0=0$ ) 并不参与集合运算，仅用来评价其它数值解的误差。

B 组试验以计算步长 0.01、阶数  $p=4$ 、计算精度  $P_r=250$  为参数计算  $t=0 \sim 100$  时刻的数值解，共产生 20 个样本的数值解用于集合运算 (试验 B、C、D、E 中不计算 0 号样本)。试验 C 同 B，但计算精度  $P_r=53$ ；试验 D、E 同 C，但阶数分别为  $p=8$  和  $p=16$  (具体的计算参数列于表 1 和表 2 中)。

表 1 样本编号及对应的初值参数

Table 1 The parameters corresponding to sample numbers

样本编号	$x$ 初值误差 $E_0 (\times 10^{-7})$	样本编号	$x$ 初值误差 $E_0 (\times 10^{-7})$
0	0	6、16	$\pm 1.5$
1、11	$\pm 1.0$	7、17	$\pm 1.6$
2、12	$\pm 1.1$	8、18	$\pm 1.7$
3、13	$\pm 1.2$	9、19	$\pm 1.8$
4、14	$\pm 1.3$	10、20	$\pm 1.9$
5、15	$\pm 1.4$		

表 2 5 组试验的计算参数

Table 2 The computation parameters corresponding to groups of experiments

试验组	步长	阶数	浮点精度
A	0.01	50	250
B	0.01	4	250
C	0.01	4	53
D	0.01	8	53
E	0.01	16	53

试验得到 5 组数据分别为：A 组为基准数据，其中  $x_0^A$  为参考解，直到 100 LTU 都是准确的；B 组为含截断误差的数据；C、D、E 组为同时含截断误差和舍入误差的数据，模拟了普通的双精度计算环境下的结果。

定义 A 组 20 个样本的误差为

$$E_n^A = x_n^A - x_0^A, \quad (11)$$

其中下标  $n$  表示第  $n$  个样本，而

$$\overline{E_n^A} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N E_n^A = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (x_n^A - x_0^A) = \left( \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N x_n^A \right) - x_0^A = \overline{x_n^A} - x_0^A, \quad (12)$$

其中  $N=20$  为样本的个数，公式 (12) 表明只需研究误差的集合平均就可以评价  $x$  变量集合平均的效果。

B 组试验的计算误差为

$$E_n^B = x_n^B - x_0^A, \quad (13)$$

这个误差体现了初值误差和截断误差的共同作用。

为了扣除初值误差的影响, 用  $E_n^B - E_n^A$  得到每个样本的截断误差, 即

$$E_n^T = E_n^B - E_n^A = x_n^B - x_n^A, \quad (14)$$

其中  $E_n^T$  为截断误差。

C 组试验的计算误差为 (也适用于 D、E):

$$E_n^C = x_n^C - x_0^A, \quad (15)$$

这个误差体现了初值误差、截断误差和舍入误差的共同作用。C 组每个样本中的舍入误差为

$$E_n^R = E_n^C - E_n^B = x_n^C - x_n^B. \quad (16)$$

### 3.3 评价方法

评价一组集合平均的数值试验能否消除计算误差的直接方法就是观察有效计算时间 ( $T_c$ ) 的变化, 如果集合平均结果的  $T_c$  比单个计算所得的  $T_c$  延长很多, 那么它就是有效的, 否则就是没有作用的。本文以误差限  $\delta = 1.0$  为判断达到  $T_c$  的标准, 另外通过误差随时间的变化曲线也能方便地判断  $T_c$  的大致范围。

### 3.4 试验结果

图 1 给出了 A 组试验的误差曲线图, 由于初值误差在  $1.0 \times 10^{-7} \sim 1.9 \times 10^{-7}$  范围内, 根据公式 (5) 可知  $T_c \approx 17.5 \sim 18.2$ , 图 1a 中的各样本误差在 18.0~19.0 LTU 附近开始有较大增加, 与公式 (5) 的结果符合。图 1b 为将 18~23 LTU 时间段内误差细致观看的结果, 集合平均的误差曲线 (红色) 在 18.6 LTU 附近出现明显增加的趋势 (图 1c), 可见当使用 20 个样本做平均时, 并不能使计算结果的  $T_c$  有明显的增加。

图 2 给出了 B 组试验的误差曲线图, 初值误差同 A, 图 2a 中的各样本误差在 8.0~9.0 LTU 附近开始有较大增加, 这是与图 1a 明显不同的, 可见此时的误差主要是由于截断误差造成的。集合平均的误差曲线在 8.0~9.0 LTU 附近出现明显增加的趋势 (图 2c), 可见集合平均不能消除截断误差带来的影响, 这也很容易理解, 因为截断误差并不是完全随机分布的。

图 3 给出了 C 组试验的误差曲线图, 初值误差同 A, 试验 C 与 B 的区别在于使用了 53 位二进制精度, 这是与普通双精度计算相当的计算精度。图 3a 中的各试验误差在 8.0~9.0 LTU 附近开始有较大增加, 这与图 2a 的结果很接近, 进一步说明了, 当计算阶数  $M=4$  时误差主要是截断误差, 而非舍入误差。集合平均的误差曲线在 8.0~9.0 LTU

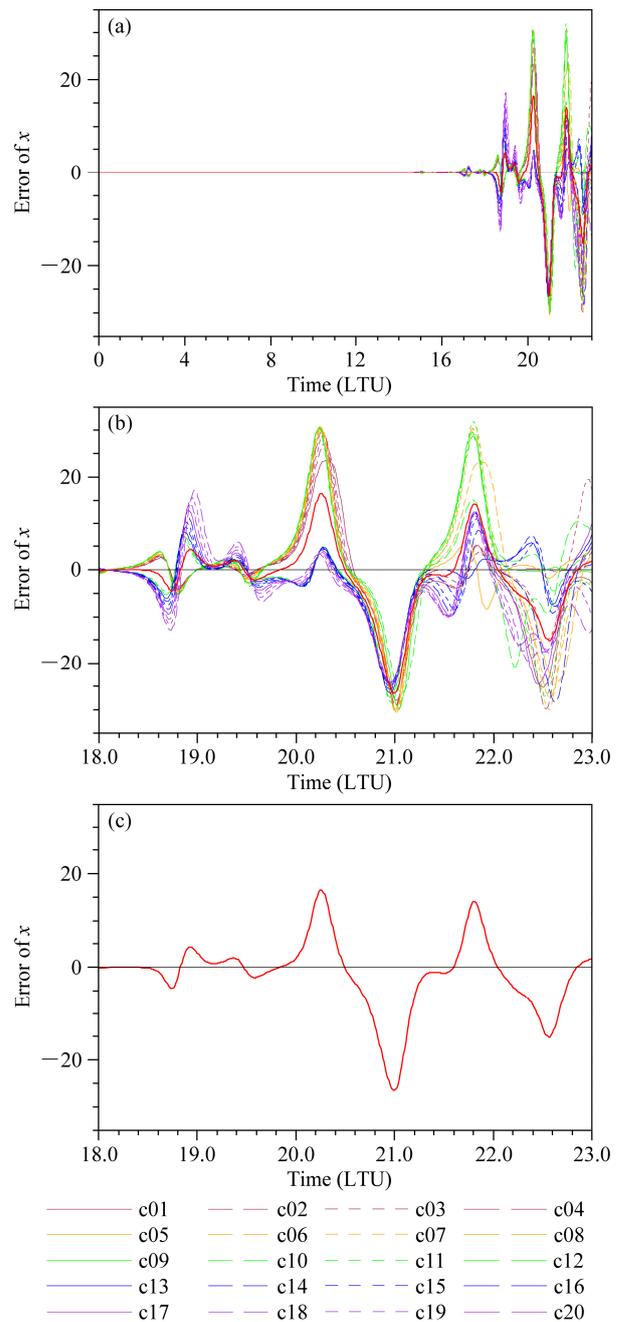


图 1 A 组试验结果 (平均误差用红色表示): (a) 0~23 LTU 20 个样本误差变化; (b) 18~23 LTU 20 个样本误差变化; (c) 18~23 LTU 的平均误差变化

Fig. 1 Results of experiments in Group A (red line marks the mean error): (a) Errors of the 20 samples in 0-23 LTU; (b) errors of the 20 samples in 18-23 LTU; (c) the mean error in 18-23 LTU

附近出现明显增加的趋势 (图 3c), 与图 2c 接近, 说明了普通的双精度计算在截断误差为主导误差的时候是无法通过集合平均的办法减小总计算误差的。

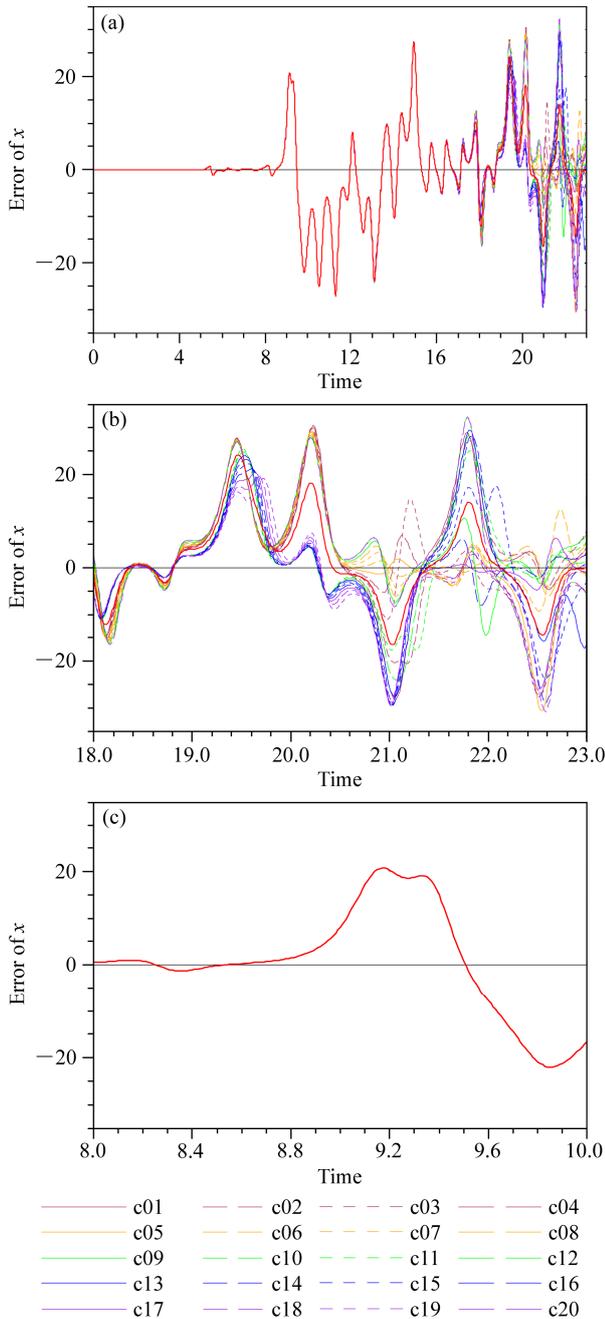


图2 B组试验结果(平均误差用红色表示): (a) 0~23 LTU 20个样本误差变化; (b) 18~23 LTU 20个样本误差变化; (c) 8~10 LTU 的平均误差变化

Fig. 2 Results of experiments in Group B (red line indicates the mean error): (a) Errors of the 20 samples in 0-23 LTU; (b) errors of the 20 samples in 18-23 LTU; (c) the mean error in 8-10 LTU

图4、5给出了D、E组试验的误差曲线图,初值误差同A,试验D、E与C的区别在于使用了8阶和16阶的算法。图4a、5a中的各试验误差与图1a的结果很接近,这表明当计算阶数增加后,截断误差减小得相当迅速,当计算阶数  $M$  大于等于 8

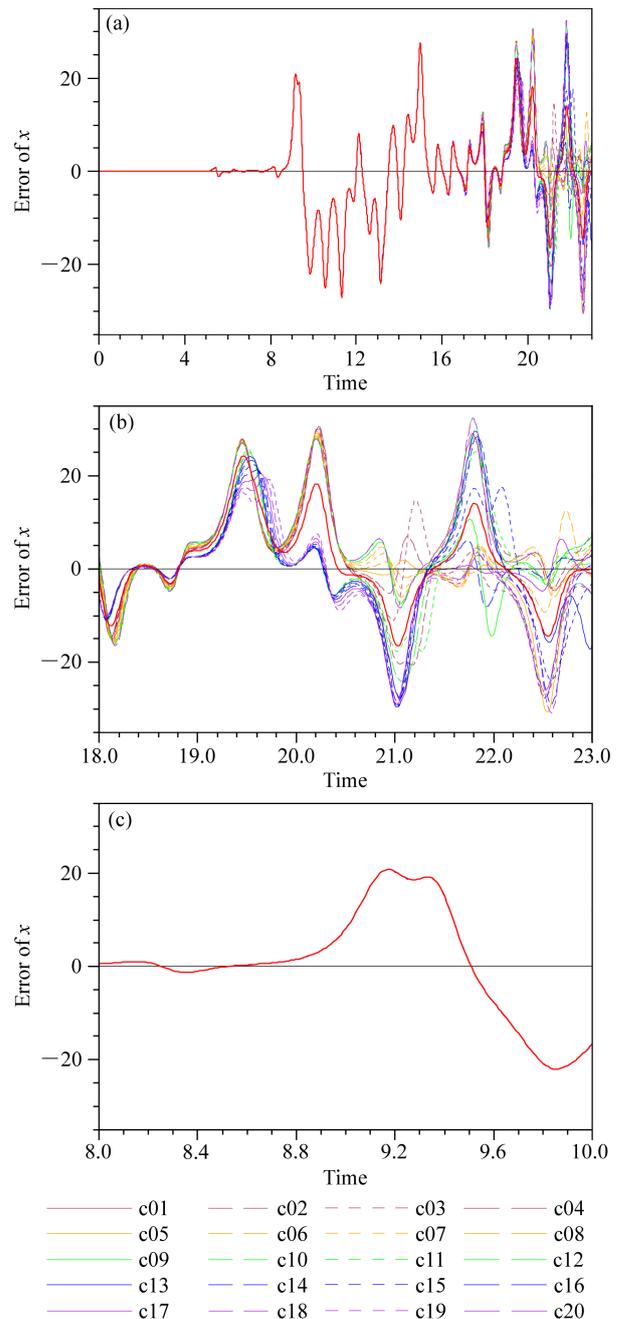


图3 C组试验结果(平均误差用红色表示): (a) 0~23 LTU 20个样本误差变化; (b) 18~23 LTU 20个样本误差变化; (c) 8~10 LTU 的平均误差变化

Fig. 3 Result of experiments in Group C (red line marks the mean error): (a) Errors of the 20 samples in 0-23 LTU; (b) errors of the 20 samples in 18-23 LTU; (c) the mean error in 8-10 LTU

阶时,误差主要取决于初值误差,而非计算误差,而且  $T_c$  趋向于 A 组试验的结果。集合平均的误差曲线也与图 1c 接近,说明了普通的双精度计算在增加阶数来控制截断误差的时候,其集合平均也趋向于 A 组的集合平均结果。

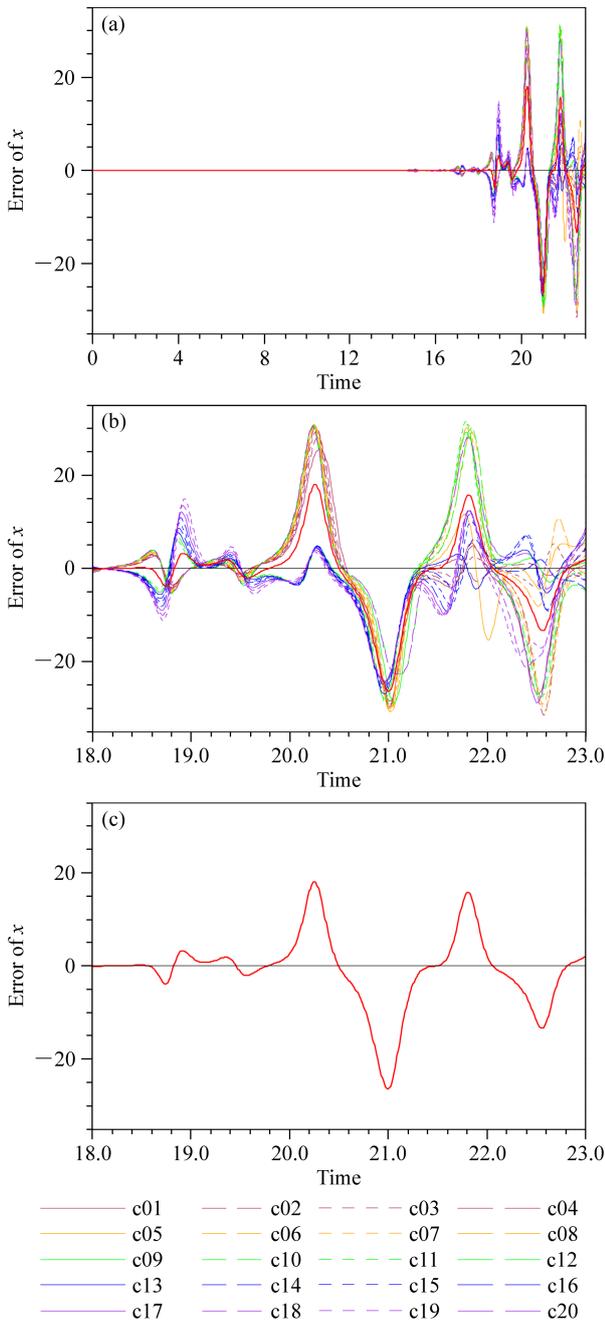


图4 同图1，但为D组试验结果  
 Fig. 4 Same as Fig. 1, but for experiments in Group D

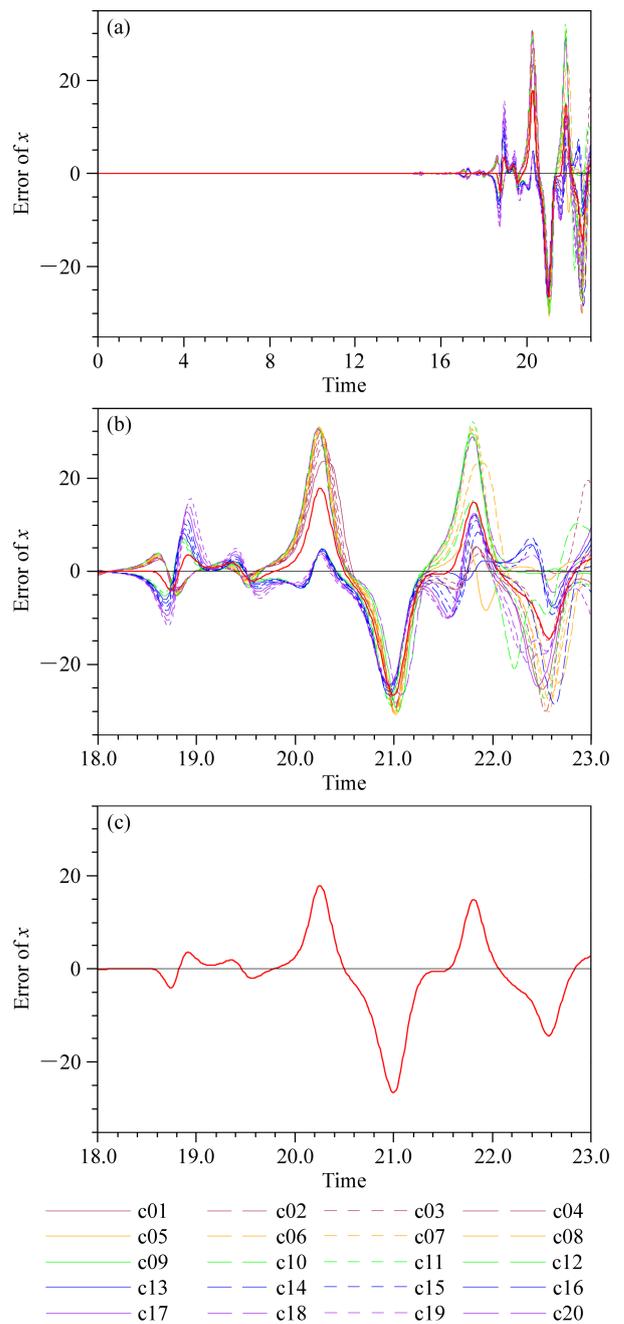


图5 同图1，但为E组试验结果  
 Fig. 5 Same as Fig. 1, but for experiments in Group E

综合上述试验的结果可见：1) 当计算误差的影响主导时，集合平均的结果将趋向于截断误差，不能减小模拟结果中的计算误差；2) 当初值误差主导的时候，普通双精度的计算环境中所取得的最好结果将趋向于A组试验，此时虽然没有截断误差和舍入误差的影响，但是  $T_c$  仍受制于公式(5)，由于初值集合点始终与准确初值点有差别，因此集合平均对计算误差的效果，仍不能达到高精度计算对

计算误差的减小程度。例如本文中的 20 个样本的集合平均只使  $T_c$  达到了 19.0 LTU，这与 A 组试验中 0 号试验达到 100.0 LTU 相差很远。

#### 4 数值解的统计特征

当我们不研究复杂的气候系统，而是关注 Lorenz 这样的简单但具有吸引子的动力系统时，其

长期状态也是一种“气候态”，即研究其  $t \rightarrow \infty$  的状态时，可以研究变量的某种概率分布形式，而不是研究具体的变量数值 ( $t \rightarrow \infty$  和  $t \in [0, T_c]$  是有区别的)。

对 Lorenz 系统，时间也可以被分为两段， $t \in [0, T_c]$  和  $t \in [T_c, \infty]$ ，前一时间段是由初值决定的，可以计算，而且计算解是有意义的；后一时间段中计算解的具体数值是没意义的，但其概率分布形式是有意义的。一般的双精度计算环境中  $T_c$  的数值在 35 左右，计算的时间虽无法达到  $\infty$ ，但很容易计算到一个充分长 (相比  $T_c$ ) 的  $t$  时刻，例如  $t=1000$  等，这样如果研究  $t \in [T_c, \infty]$  的概率分布形

式，将与  $t \in [0, 1000]$  所得的概率分布形式相差不大。当然也可以在数值解中剔除  $t \in [0, T_c]$  这部分数值，得到  $t \in [T_c, 1000]$  中的概率分布形式，试验的结果表明它们的形式也相差不大。

记  $t \rightarrow \infty$  时 Lorenz 系统在吸引子空间的概率密度分布函数为  $p(x, y, z)$ ，另记  $p_x(x) = \iint p(x, y, z) dy dz$  为变量  $x$  的一维概率分布形式。当  $p(x, y, z)$  确定时， $p_x(x)$  也是确定的，同理可定义  $p_y(y)$  和  $p_z(z)$ 。对集合平均解也存在概率分布函数为  $q(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ ，对应的单变量分布函数为  $q_x(\bar{x})$ 、 $q_y(\bar{y})$ 、 $q_z(\bar{z})$ 。

如果  $t \rightarrow \infty$  集合平均能够再现 Lorenz 系统的

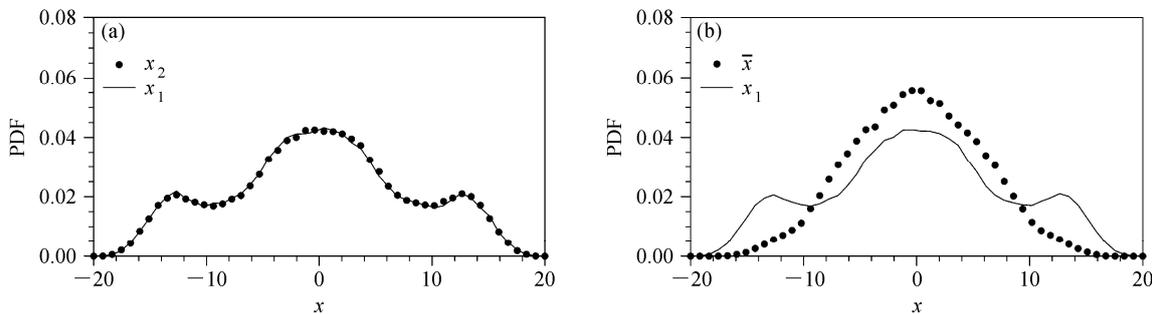


图 6 Lorenz 系统长时间积分所得的单变量 (x) 概率分布形式，积分时间为  $t \in [0, 1000]$ 。(a) 实线为方程 (2) 数值解中  $x_1$  的概率密度分布，点为方程 (2) 数值解中  $x_2$  的概率分布密度。(b) 实线同 (a)，点为方程 (2) 数值解中  $\bar{x}$  的概率分布密度

Fig.6 Single variables' PDFs of the Lorenz system in the long-term integration,  $t \in [0, 1000]$ . (a) The solid line indicates the PDF of  $x_1$ , which is the numerical solution of equation (2); the dot shows the PDF of  $x_2$ , which is the numerical solution of equation (2) but with a different initial value. (b) The solid line is the same as that in (a); the dot represents the PDF of  $\bar{x}$ , which is the ensemble mean solution of equation (2)

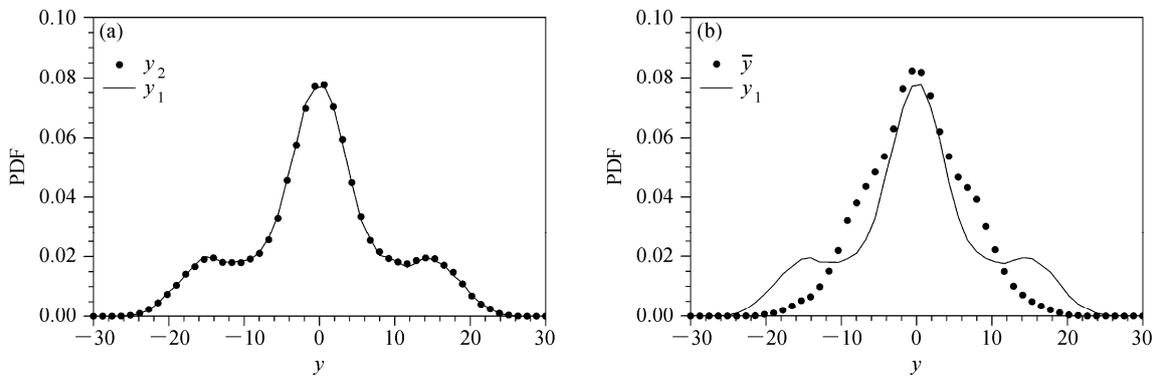


图 7 同图 6，但为变量 y

Fig. 7 Same as Fig. 6, but for y

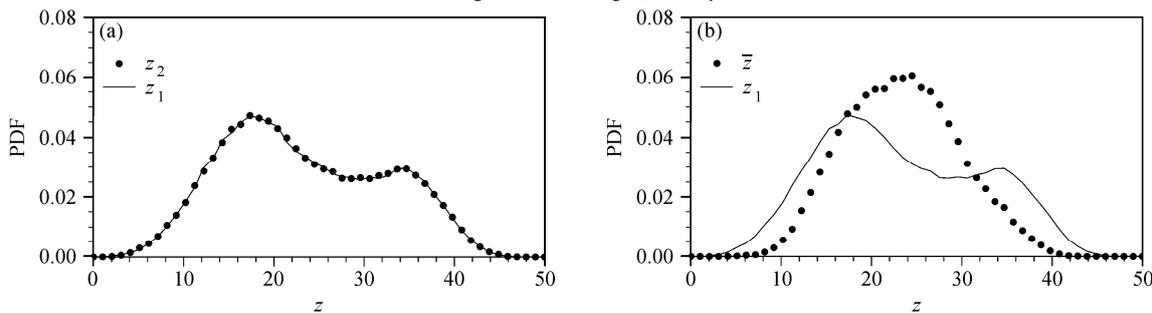


图 8 同图 6，但为变量 z

Fig. 8 Same as Fig. 6, but for z

性质, 那么会有  $p(x, y, z) = q(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ , 即均值解和数值解有同样的概率分布形式, 否则就说明集合平均在研究 Lorenz 系统长期性质上是无效的。

由概率统计理论可知, 如果  $p(x, y, z) = q(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ , 那么将有  $p_x(x) = q_x(\bar{x})$ ,  $p_y(y) = q_y(\bar{y})$ ,  $p_z(z) = q_z(\bar{z})$ , 反之则不一定成立。而且一旦  $p_x(x) \neq q_x(\bar{x})$ , 那么一定有  $p(x, y, z) \neq q(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ , 下面的数值试验将明显地看出  $p_x(x) \neq q_x(\bar{x})$  这个结论。

从图 6a 可以看出, 即使初值有一定的差别, 各数值解所得的 Lorenz 系统在长时间积分时所得的概率密度分布的形式是一致的。但是当进行集合平均计算之后, 平均值对应的概率密度分布与原变量的概率密度分布形式有很大的差别 (见图 6b), 主要是  $x$  变量的多峰结构被单峰结构所取代, 而且 0 点附近出现的概率比原解大, 即集合解中  $x$  的值更趋向于中间值。

$y$  的分布也是关于 0 点对称的, 而且进行集合平均计算之后, 平均值对应的概率密度分布与原变量的概率密度分布形式有差别 (见图 7b), 0 点附近出现的概率比原解大, 集合解中  $y$  的值也趋向于中间值。

与  $x, y$  变量不同的是  $z$  变量的概率分布形式不是关于  $z = 0$  对称的, 而是在  $z = 18$  和  $z = 35$  附近出现大值区。进行集合平均计算之后, 平均值对应的概率密度分布与原变量的相比只有一个主要的峰值区,  $z = 26$  点附近出现的概率比原解大, 集合解中  $z$  的值也趋向于中间值 (见图 8)。

上面的试验已经可以看出, 对 Lorenz 系统的长期计算解, 如果进行了集合平均的处理, 那么集合解除了可以保持中间值 (即时间平均值) 不变这个性质以外, 其它各处的概率密度分布形式都发生了变化, 因此不适于研究解的细节结构。另外可以看出, 只要是数值解, 它们的概率密度分布形式就基本一致, 初值的变动对它影响不大, 这说明对于动力系统, 即使数值解的概率密度分布形式基本正确, 也不能保证数值解是正确的。

## 5 结论和讨论

对于 Lorenz 非线性动力系统的数值计算表明: 集合平均对计算误差的减小和消除没有明显的作用, 这主要体现在以下几方面: 1) 普通的算法和双精度的计算环境中, 截断误差是主导误差 (当初值误差很小时), 各集合的平均结果并不收敛于真

值, 而是收敛于含截断误差的解。2) 若初值误差为主导时, 此初值误差一定不会很小, 因此受到公式 (5) 的制约, 从而导致  $T_c$  也不会很大。3) 这两种误差量级接近的时候, 每种误差都无法消除掉, 结果  $T_c$  将不会超过公式 (4) 和公式 (5) 所定义的  $T_c$  中的小者。这就说明了普通的低阶算法和双精度的计算环境中, 集合平均对消除和减小计算误差无明显的作用, 也说明了研究高精度的新算法在减小动力系统计算误差中不可替代的作用。

理论分析显示集合平均所构成的动力系统与原系统具有相同的最大 Lyapunov 指数 (这里指线性近似下的最大 Lyapunov 指数) (<http://arxiv.org/abs/1311.2239>[2013-11-10]), 两者本质上误差的增长速率是不变的, 因此理论上的平均最大的可预报时间也与原系统相同。从试验结果的统计特征可以看出, 对 Lorenz 系统的长期计算解, 如果进行了集合平均的处理, 那么集合解除了可以保持中间值 (即时间平均值) 不变这个性质以外, 其它各处的概率密度分布形式都发生了变化, 因此不适于研究解的细节结构。另外只要是数值解, 不管是否有计算误差, 它们的概率密度分布形式是基本一致的, 初值和扰动的选取对其影响不大, 这表明对于动力系统来说, 即使数值解的概率密度分布形式是正确的, 也不能保证数值解是正确的。

集合平均对于减小计算误差没有显著作用并不意味着它一定对天气预报和气候数值模拟的研究也没有效果, 原因在于天气系统和气候系统有明显的周期性外强迫源, 这与本文所用的简单混沌系统是有区别的。因此集合平均能否减小含周期外强迫的混沌系统中的计算误差还需要进一步的工作。

## 参考文献 (References)

- Anderson J L. 1997. The impact of dynamical constraints on the selection of initial conditions for ensemble predictions: Low-order perfect model results [J]. *Mon. Wea. Rev.*, 125 (11): 2969–2983, doi: 10.1175/1520-0493(1997)125<2969:TIDOCO>2.0.CO;2.
- Barrio R. 2005. Performance of the Taylor series method for ODEs/DAEs [J]. *Applied Mathematics and Computation*, 163 (2): 525–545, doi: 10.1016/j.amc.2004.02.015.
- Barrio R, Rodríguez M, Abad A, et al. 2011. Breaking the limits: The Taylor series method [J]. *Applied Mathematics and Computation*, 217 (20): 7940–7954, doi: 10.1016/j.amc.2011.02.080.
- Brent R P. 1978. A Fortran multiple-precision arithmetic package [J]. *ACM Transactions on Mathematical Software (TOMS)*, 4 (1): 57–70, doi:

- 10.1145/355769.355775.
- 蔡其发, 张立凤, 张铭. 1999. 中期数值天气预报的集合预报试验 [J]. 气候与环境研究, 4 (4): 365–374. Cai Qifa, Zhang Lifeng, Zhang Ming. 1999. The experiment of ensemble forecasting about numerical medium-range forecasting [J]. Climatic and Environmental Research (in Chinese), 4 (4): 365–374, doi: 10.3878/j.issn.1006-9585.1999.04.05.
- Epstein E S. 1969. Stochastic dynamic prediction [J]. Tellus, 21 (6): 739–759, doi: 10.1111/j.2153-3490.1969.tb00483.x.
- Evensen G, Van Leeuwen P J. 1996. Assimilation of Geosat altimeter data for the Agulhas current using the ensemble Kalman filter with a quasigeostrophic model [J]. Mon. Wea. Rev., 124 (1): 85–96, doi: 10.1175/1520-0493(1996)124<0085:AOGADF>2.0.CO;2.
- 封国林, 董文杰. 2003. 集合预报物理基础的探讨 [J]. 物理学报, 52 (9): 2347–2353. Feng Guolin, Dong Wenjie. 2003. On physical basis of ensemble prediction [J]. Acta Physica Sinica (in Chinese), 52 (9): 2347–2353, doi: 10.7498/aps.52.2347.
- Fritsch J M, Hilliker J, Ross J, et al. 2000. Model consensus [J]. Wea. Forecasting, 15 (5): 571–582, doi: 10.1175/1520-0434(2000)015<0571:MC>2.0.CO;2.
- Hénon M, Heiles C. 1964. The applicability of the third integral of motion: Some numerical experiments [J]. The Astronomical Journal, 69: 73–79, doi: 10.1086/109234.
- Hoffman R N, Kalnay E. 1983. Lagged average forecasting, an alternative to Monte Carlo forecasting [J]. Tellus A, 35A (2): 100–118.
- Houtekamer P L, Derome J. 1994. Prediction experiments with two-member ensembles [J]. Mon. Wea. Rev., 122(9): 2179–2191, doi: 10.1175/1520-0493(1994)122<2179:PEWTME>2.0.CO;2.
- Houtekamer P L, Derome J. 1995. Methods for ensemble prediction [J]. Mon. Wea. Rev., 123 (7): 2181–2196, doi: 10.1175/1520-0493(1995)123<2181:MFEP>2.0.CO;2.
- Houtekamer P L, Lefaiivre L, Derome J, et al. 1996. A system simulation approach to ensemble prediction [J]. Mon. Wea. Rev., 124 (6): 1225–1242, doi: 10.1175/1520-0493(1996)124<1225:ASSATE>2.0.CO;2.
- 姜智娜, 穆穆, 王东海. 2008. 基于条件非线性最优扰动方法的集合预报试验 [J]. 中国科学 (D辑: 地球科学), 38 (11): 1444–1451. Jiang Zhina, Mu Mu, Wang Donghai. 2008. Ensemble forecasting tests based on the conditional nonlinear optimal perturbation method [J]. Science in China (Ser. D: Earth Sciences) (in Chinese), 38 (11): 1444–1451.
- Kalnay E, Ham M. 1989. Forecasting forecast skill in the Southern Hemisphere [C]// Preprints of the 3rd International Conference on Southern Hemisphere Meteorology and Oceanography, Buenos Aires. Boston, MA: American Meteorological Society.
- 康红文, 祝从文, 左志燕, 等. 2012. 多模式集合预报及其降尺度技术在东亚夏季降水预测中的应用 [J]. 气象学报, 70 (2): 192–201. Kang Hongwen, Zhu Congwen, Zuo Zhiyan, et al. 2012. Statistical downscaling of pattern projection using multi-model output variables as predictors [J]. Acta Meteorologica Sinica (in Chinese), 70 (2): 192–201, doi: 10.11676/qxxb2012.019.
- Leith C E. 1974. Theoretical skill of Monte Carlo forecasts [J]. Mon. Wea. Rev., 102 (6): 409–418, doi: 10.1175/1520-0493(1974)102<0409:TSOMCF>2.0.CO;2.
- Li J P, Zeng Q C, Chou J F. 2000. Computational uncertainty principle in nonlinear ordinary differential equations-I. Numerical results [J]. Science China Technological Sciences, 43 (5): 449–461.
- Li J P, Zeng Q C, Chou J F. 2001. Computational uncertainty principle in nonlinear ordinary differential equations-II. Theoretical analysis [J]. Science in China Series E: Technological Sciences, 44 (1): 55–74, doi: 10.1007/BF02916726.
- Liao S J. 2009. On the reliability of computed chaotic solutions of nonlinear differential equations [J]. Tellus A, 61 (4): 550–564.
- Liao S J, Wang P F. 2014. On the mathematically reliable long-term simulation of chaotic solutions of Lorenz equation in the interval [0, 10000] [J]. Science China Physics, Mechanics and Astronomy, 57 (2): 330–335, doi: 10.1007/s11433-013-5375-z.
- Lorenz E N. 1963. Deterministic nonperiodic flow [J]. J. Atmos. Sci., 20 (2): 130–141, doi: 10.1175/1520-0469(1963)020<0130:DNF>2.0.CO;2.
- Molteni F, Buizza R, Palmer T N, et al. 1996. The ECMWF ensemble prediction system: Methodology and validation [J]. Quart. J. Roy. Meteor. Soc., 122 (529): 73–119, doi: 10.1002/qj.49712252905.
- Moore R E. 1966. Interval Analysis [M]. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.
- Moore R E. 1979. Methods and Applications of Interval Analysis [M]. Philadelphia: SIAM, 190pp.
- Palmer T N, Molteni F, Mureau R, et al. 1993. Ensemble prediction [C]// Proceedings of the ECMWF Seminar on Validation of Models over Europe: Vol 1. Shinfield Park, Reading, UK.
- Portilho O. 1990. MP-A multiple precision package [J]. Computer Physics Communications, 59 (2): 345–358, doi: 10.1016/0010-4655(90)90183-2.
- 田伟红, 庄世宇. 2007. 适应性观测与集合变换卡尔曼滤波方法介绍 [J]. 热带气象学报, 23 (2): 201–204. Tian Weihong, Zhuang Shiyu. 2007. The adaptive observation and the ensemble transform Kalman filter [J]. Journal of Tropical Meteorology (in Chinese), 23 (2): 201–204.
- Toth Z, Kalnay E. 1993. Ensemble forecasting at NMC: The generation of perturbations [J]. Bull. Amer. Meteor. Soc., 74 (12): 2317–2330, doi: 10.1175/1520-0477(1993)074<2317:EFANTG>2.0.CO;2.
- Wang P F, Huang G, Wang Z Z. 2006. Analysis and application of multiple-precision computation and round-off error for nonlinear dynamical systems [J]. Advances in Atmospheric Sciences, 23 (5): 758–766, doi: 10.1007/s00376-006-0758-y.
- Wang P F, Li J P, Li Q. 2012. Computational uncertainty and the application of a high-performance multiple precision scheme to obtaining the correct reference solution of Lorenz equations [J]. Numerical Algorithms, 59 (1): 147–159, doi: 10.1007/s11075-011-9481-6.
- Wang P F, Liu Y, Li J P. 2014. Clean numerical simulation for some chaotic systems using the parallel multiple-precision Taylor scheme [J]. Chinese Science Bulletin, 59 (33): 4465–4472, doi: 10.1007/s11434-014-0412-5.
- 王鹏飞, 温冠环, 黄刚. 2014. 集合平均所构成的动力系统及其特性研究 [J]. 大气科学学报, 37 (6): 723–731. Wang Pengfei, Wen Guanhuang, Huang Gang. 2014. An approach for analyzing the ensemble mean from a dynamic point of view [J]. Transactions of Atmospheric Sciences (in Chinese), 37 (6): 723–731.
- 郑飞, 王慧, 朱江. 2009. 初始误差和模式误差对 ENSO 集合预报的影响 [J]. 科学通报, 54 (16): 2395–2401. Zheng Fei, Wang Hui, Zhu Jiang. 2009. ENSO ensemble prediction: Initial error perturbations vs. model error perturbations [J]. Chinese Science Bulletin, 54 (14): 2516–2523.